Moody's Analytics / Barrie & Hibbert
Insight シリーズ（第６回）

カーブ・フィッティング法と最小二乗モンテカルロ法の比較

ムーディーズ・アナリティックス／Barrie&Hibbert 部門
Adam Kousaris
Adam.Kousaris@barrhibb.com

今回は、最小二乗モンテカルロ（LSMC）法と「カーブ・フィッティング法」を使用した１年間のバリュー・アット・リスク計算の類似点と相違点についてお話します。また、この二つの手法がネステッド・ストキャスティックな計算といかに類似しているかについても考察します。さらに、「カーブ・フィッティング法」が、LSMC 法の特例に相当するものの、非効率な手法であることについて説明します。

「１年間」の定義

まず、１年間とは何を意味するのかを正確に定義することが重要です。

１年間のバリュー・アット・リスク資本を正しく計算するには、１年間の支払い能力に問題がないことに確信が持てるよう、その間発生する全てのイベントの影響も踏まえ、今日必要とされる金額を計算しなければなりません。つまり、負債は時間の経過と共に減少し、資産および負債のキャッシュフローには出入りがあり、それらの構成が変化し、市場における経済変数が全１年間の市場リスクを経験していると想定します。

しかし、１年間の時間枠で内部モデルをロール・フォワードすることは複雑であるため、多くの保険会社は、「Ｔ０の負債」アプローチの利用を好みます。ここでは、経済変数が全１年間の市場リスクを経験する一方で、「負債時間」は進まないと想定します。本稿では触れませんが、各負債時間の定義の下、考慮しなければならないデリケートな問題が数多く存在します。

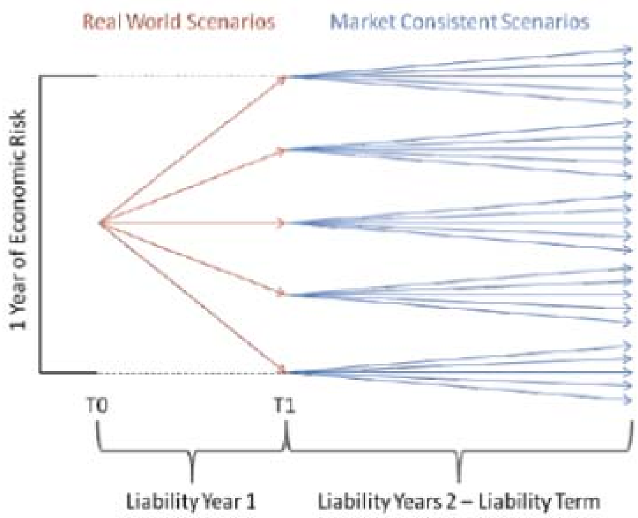
ここで留意すべき重要な点は、Ｔ１あるいはＴ０のいずれかの負債定義が、ここで検討する手法のいずれにも利用できるということです（但し一般的には、カーブ・フィッティング法では、Ｔ１の負債手法を使用した場合、他の手法を使用した場合よりも複雑な結果をもたらします)。

手法の図表化
ネステッド・ストキャスティクス

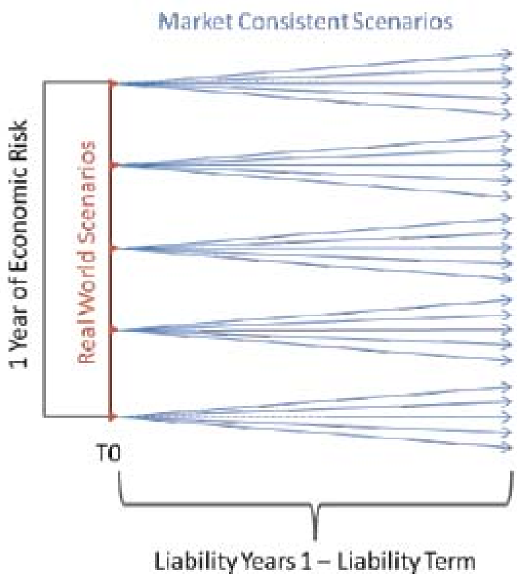
ネステッド・ストキャスティクス・シミュレーションでは、バリュー・アット・リスクを正確に予測するため、リアルワールド前提（アウター）シナリオや市場整合的な（インナー）シナリオを数多く使用します。この時、Ｔ１負債手法を用いることが通常ですが、モデリングの簡素化のため、Ｔ０法を利用することもできます。これを図表化したのが図表１です。

図表１　ネステッド･ストキャスティクス･シミュレーション

T1 手法



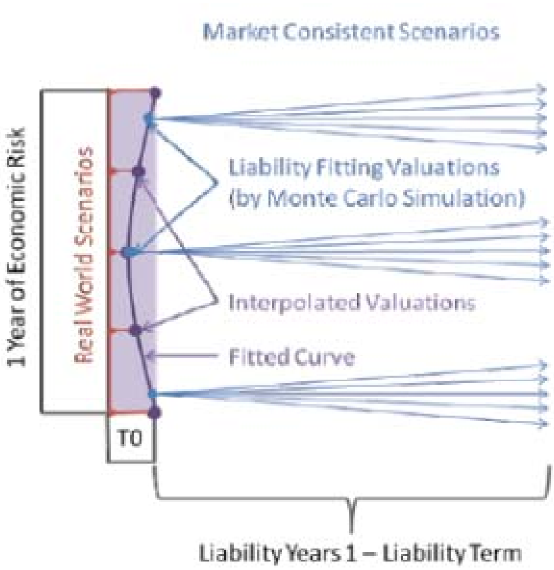
T0 手法



カーブ・フィッティング

カーブ・フィッティング法では、市場整合的な評価を少数実行し、それらをフィットさせたカーブでインターポレーション（あるいはエクストラポレーション）し、リアルワールド前提のシミュレーション全てにおける負債の価値を求めます。通常は簡素化のため、T０負債定義が使用されます。このことを示したのが図表２です。

図表2　カーブ・フィッティング法（T0法）

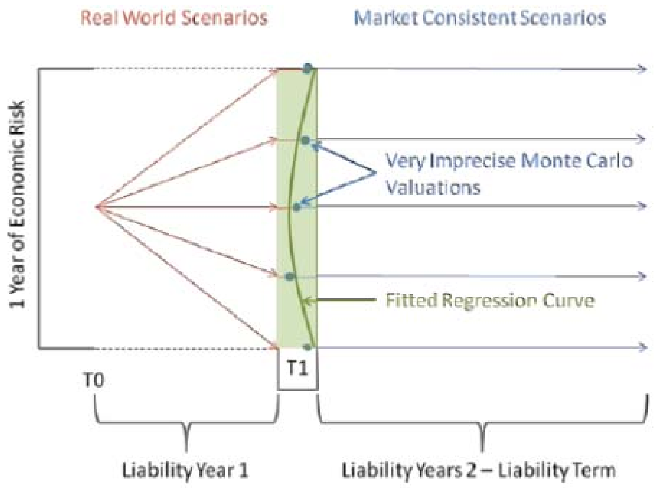


最小二乗モンテカルロ（LSMC）法

LSMC 法は、カーブ・フィッティング法と似た概念を使用しますが、フィッティング方法が異なります。

LSMC 法では伝統的に、時間軸１に対しリアルワールド前提のシナリオを使用して予測し、その後、これら各シナリオに対し市場整合的インナー・シナリオを生成します。未加工のインナー・シナリオの現在価値を通る回帰を実行することでカーブにフィットさせ、このカーブを使用して各リアル・ワールド前提のシナリオにおける負債を評価します（図表３）。

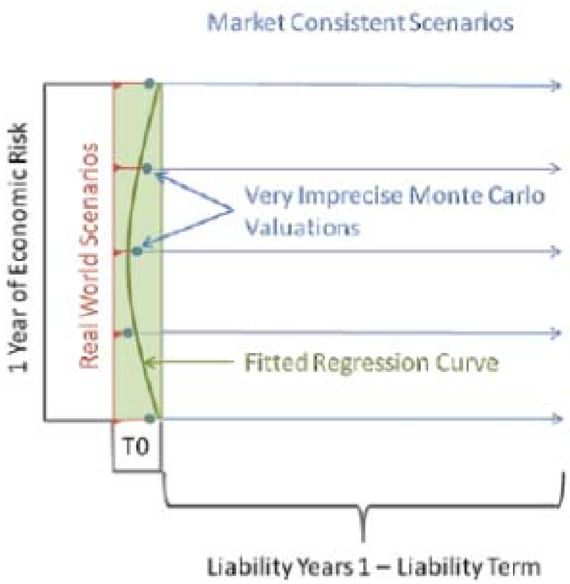
図表3　最小二乗モンテカルロの伝統的な手法



LSMC 法は、ネステッド・ストキャスティクス・シミュレーション（但し、市場整合的インナー・シミュレーションはより少ない）とカーブ・フィッティング法（但し、正確なポイントを通ったカーブではなく、不正確なポイントを通った回帰のフィッティング）の双方に対して類似点がみられます。

カーブ・フィッティング法に関しては、Ｔ０の負債想定を使って最小二乗モンテカルロ法のフィットを実行することが可能です（図表４）。

図表4　T0の負債手法を使った最小二乗モンテカルロ

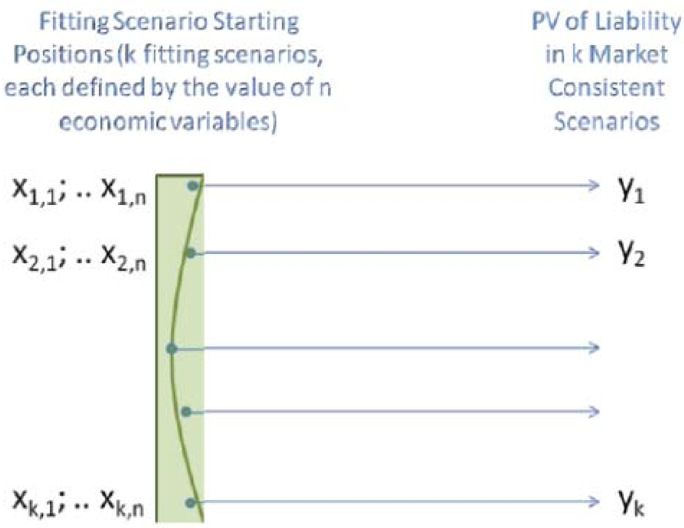


フィッティングシナリオ（回帰カーブを見つけるために使用）とリアルワールド前提の予想シナリオ[1]（回帰カーブから負債を評価するポイント）を分けることも可能です（図表５）。

図表５　別のフィッティング・シナリオを使用した最小二乗モンテカルロT0負債

LSMC 法による計算のフィッティング部分に注目し、参照し易いようにいくつかラベルを追加すると、図表６のようになります。

図表６　LSMC 法のフィッティング・プロセス



[1] 実際、フィッティングを回帰シナリオから引き離すことで、フィットの正確性や同じランタイムの資本計算を大幅に改善させることができます。

経済リスク要因に対し k 個の開始位置を選択します。各シナリオ（群）の開始位置は n 個の値 $x_{s,1} \cdot\cdot x_{s,n}$ によって定義されます。これらは経済リスク要因の n 個の関数一式の価値です。例えば、標準多項式をフィッティング関数として利用したいと想定します。２つのリスク要因に５つのフィッティング関数（株式リスクにはパワー関数３つ（３指数乗まで)、金利リスクにはパワー関数２つ（２指数乗まで)）がある場合、シナリオ１では x 変数は以下のようになります。

$$x_{1,1} = EquityReturn_1$$

$$x_{1,2} = (EquityReturn_1)^2$$

$$x_{1,3} = (EquityReturn_1)^3$$

$$x_{1,4} = (InterestRate_1)$$

$$x_{1,5} = (InterestRate_1)^2$$

開始時の経済リスク要因に基づき各シナリオの現在価値を見つけ、これらを y_1 …y_k と呼びます。回帰関数を見つけるには、通常の最小二乗法を使って x に対する y の回帰を実行します。回帰の結果は、多項関数を定義する係数一式となります。

形式上、
y_i を、シナリオ i のキャッシュフローの現在価値とします。i=1…k
$x_{i1} \cdot\cdot x_{in}$ を、シナリオ i の開始位置を定義する n 個のリスク要因の基底関数の値であるとします。　i=1…k

カーブ・フィッティングに対して使用したのと同じ基底関数を使用すると想定します。

リスク要因の開始価値（つまり基底関数の開始価値）は、ほどよくバラツキが出るよう k シナリオ全てで異なると想定します。

通常の最小二乗法を使った回帰を実行し y_i 等を予測する n 個の基底関数の n 個の係数を見つけます。

回帰に対する解は、

$$\mathbf{a} = (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{y}$$ となります。

ここで、

$$X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k,1} & \cdots & x_{k,n} \end{bmatrix}$$

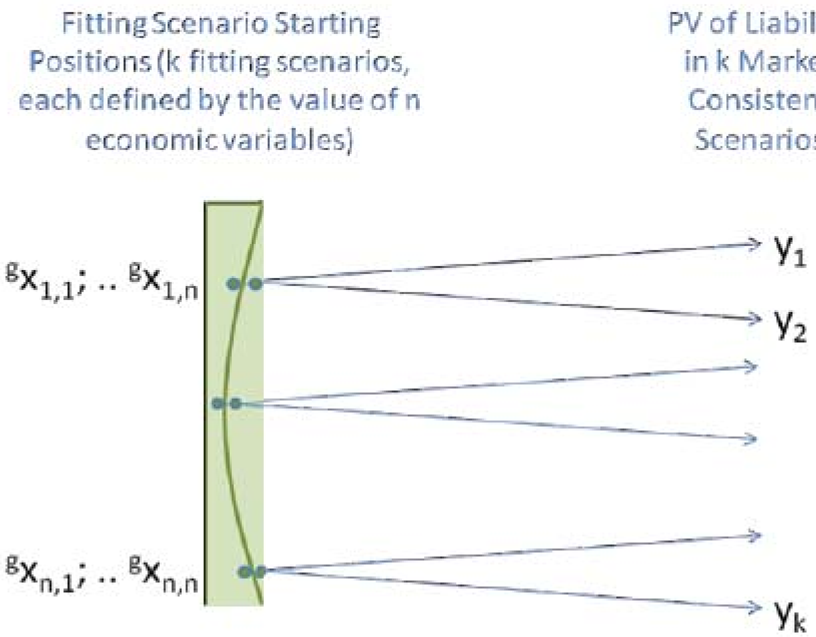
$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

となります。

a は求めようとしている係数のベクトルです。

ここで、LSMC とカーブ・フィッティング法の等価性を証明するため、シナリオに対して異なる開始位置を使う代わりに、k 個のシナリオを n 個のグループにグループ分けし、各グループに m=(k/n)個のシナリオが入るようにします。各グループの全てのシナリオは、同じ開始位置をとっています。市場整合的シナリオは異なった変化をするため y_i 等に対し k の異なる価値があります。これは図表 7 の通りです。

図表7　最小二乗モンテカルロのフィッティング・プロセス（開始位置をグループ化）



これは、明らかにカーブ・フィッティング法と類似しています。しかしながら、カーブ・フィッティング法では、まず、シナリオの平均値を算出し、n 個のフィッティング・シナリオを使用して n 個の係数を見つけます。グループ化した LSMC 法では、回帰手法を引き続き使用します。回帰線がグループ化したシナリオセットのそれぞれの平均を通る限り、結

果は同じになります。これは事実であることが判明しており、以下でその証明について説明します。

X マトリクスをmの重複行がある n のグループにグループ分けしました。残りの行は直線的に依存性があると想定します。従ってマトリクスの階数は n です。

X マトリクスの階数は列の数と同数であるため、そのマトリクスは左可逆になります。すなわち、補助定理 1 では、以下のようなマトリクス W が存在します。

$WX=I_n$　(1)　(補助定理 1 による)

$(X^T X)^{-1}=WW^T$　(2)　(補助定理 2 による)

$W^T X^T= I_n$　(3)　(補助定理 1 による)

従って、
a= $(X^T X)^{-1} X^T y$
a= $WW^T X^T y$　(2)による
a=Wy　(3)による

W の列は n グループ内で重複しているため、これを以下のように表現することもできます。
$a={}^{9}x^{-1}y$

この時、

$$\bar{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i \\ \vdots \\ \frac{1}{m}\sum_{i=k-m}^{k} y_i \end{pmatrix}$$

となります。

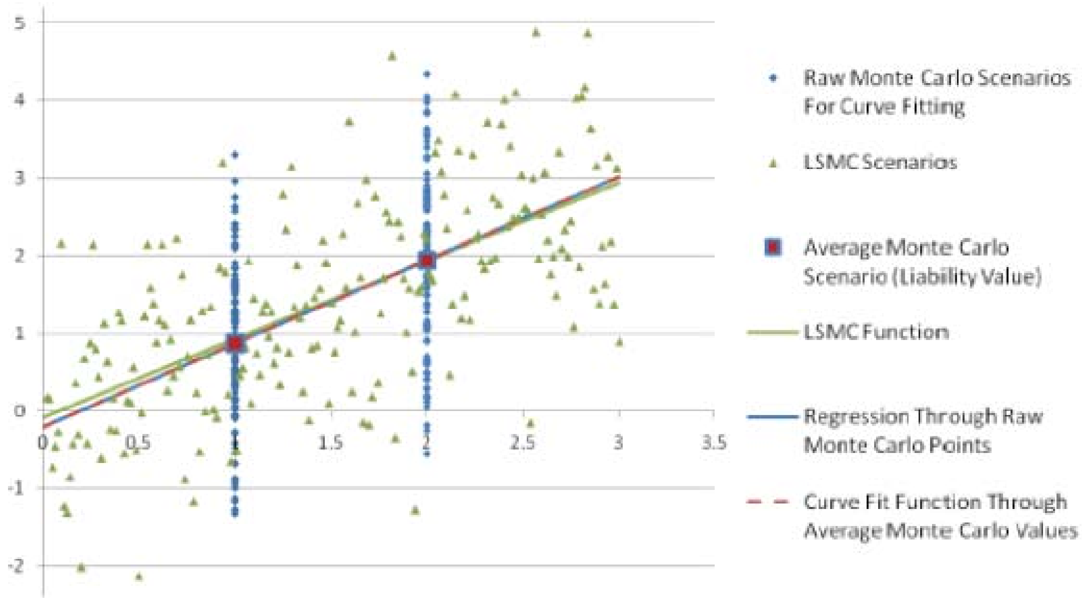
これが、グループ化した LSMC 法と同じ X の値（基底関数と同じ形式で n のフィッティング・ポイントと同じ開始価値）を使用するカーブ・フィッティングの解と同じことは容易に分かります。

両方の手法は、可逆的である ${}^{9}X$ に依存しています。

これは、直感的な結果と言えるでしょう。カーブ・フィッティング法のプロセスでは、各フィッティング・ポイントの市場整合的シナリオのいくつかのグループの平均をとって得た負債の予測値を通ってカーブをフィットさせます。グループ化した LSMC と同等の手法では、カーブ・フィッティング法の未加工の負債シミュレーションを通って回帰をフィットさせます。グループと同じ数だけ多くのパラメータでこの回帰を実行する場合、回帰線は常に各グループのシナリオの平均値を通ります。

このプロセスを図表化すると図表８のようになります。

図表8グループ化した LSMC 法とカーブ･フィッティング法



未加工のモンテカルロのポイントにフィットさせた回帰線は、カーブ・フィッティング・シナリオの二つのグループの平均を通るように選択した線と同じであることが分かります。「グループ化していない」LSMC 手法の場合、関心のある範囲全体に及ぶシナリオを通るフィッティングをすることで、別の回帰線が描かれます。

このように、フィッティングシナリオをある方法でグループ化した場合、カーブ・フィッティング法は LSMC 法と同等になることは証明されました。しかしながら、この方法は回帰を実行する上では非常に非効率的です。伝統的な LSMC フィッティング法を使い、関心のある範囲全体に亘る良好な層別が得られるようにフィッティング・シナリオを選択した方が、同じ数のシナリオに対する関数の予測が遙かに良好になります。LSMC 法においては、負債関数がより正確になるというだけではなく、以下のように魅力的な特徴も数多く

存在します。

- Ｔ１の負債定義を簡単に使用できます。
- 部分的 LSMC 法／カーブ・フィッティング法を使用できます。LSMC 法はカーブ・フィッティング法と同等なので、あるリスクに対する LSMC カーブを計算し、カーブ・フィッティング法を使用してこのカーブを別のリスクに拡大適用することができます。これは、シミュレーションによって決定されたリスクよりもむしろ分析的に決定されたリスクを追加する場合に有用となる場合があります。
- 非市場性リスクを容易に統合できます。シミュレーションした LSMC フィッティング・シナリオでカバーされたリスクの範囲を拡大することで、死亡率や失効、その他の非市場性リスク等の他のリスクをカバーする負債関数を見つけるために回帰を拡大適用することができます。
- LSMC 法は、どこでもよりよくフィットするカーブを生み出します。つまり、計算日後の負債の価値やより長期の資本を正確に予測するために、徐々に負債関数をロール・フォワードできるということを意味します。
- LSMC 法は、将来的に必要とされる資本を推測するために拡張利用できます。将来シミュレーションに対し回帰を実行することで、所要資本がいかに時間の経過と伴に変化する可能性があるかを予測することができます。
- LSMC 法は、カーブ・フィッティング法よりもサンプリングのエラーが少数です。そして、リスク要因の数の増加につれ、LSMC 法の相対的な効率性は上昇します。
- LSMC 法では、算出された資本の標準エラーが把握できます。つまり、LSMC 法に従って資本の予測の周辺のエラー・バンドを予測し、この潜在的なエラーを許容可能な水準に減少させるために必要なシナリオの数を計算することができます。カーブ・フィッティング法は潜在的な計算エラーを数多く抱えていますが、フィッティング・シナリオの設定に使用する手法が、フィッティングの結果に対し大きく不確かな影響を与えるた、め、その規模を予測することが困難です。

結論

カーブ・フィッティング法は LSMC 法の特例に相当しますが、非効率的な手法です。一方 LSMC 法は、副次的なメリットが多いと考えられ、生命保険会社の資本を計算する上ではより優れた手法であると考えられます。

（了）