

## 最小二乗モンテカルロ法の優位性

ムーディーズ・アナリティックス / Barrie & Hibbert 部門

Adam Kousaris

[Adam.Kousaris@barrhibb.com](mailto:Adam.Kousaris@barrhibb.com)

本シリーズの前回のレポートでは、カーブ・フィッティング法についてお話ししました。「インタポレーションを伴うネステッド・ストキャスティクス」を使用した 1 年間のバリュー・アット・リスク資本の計算をスピードアップさせるために、カーブ・フィッティング法をどのように利用できるかについて検討してきました。今回は、最小二乗モンテカルロ (LSMC) 法とそれがカーブ・フィッティング法よりも優位である点 (主として計算のスピードと正確性が向上) について焦点を当ててお話ししたいと思います。

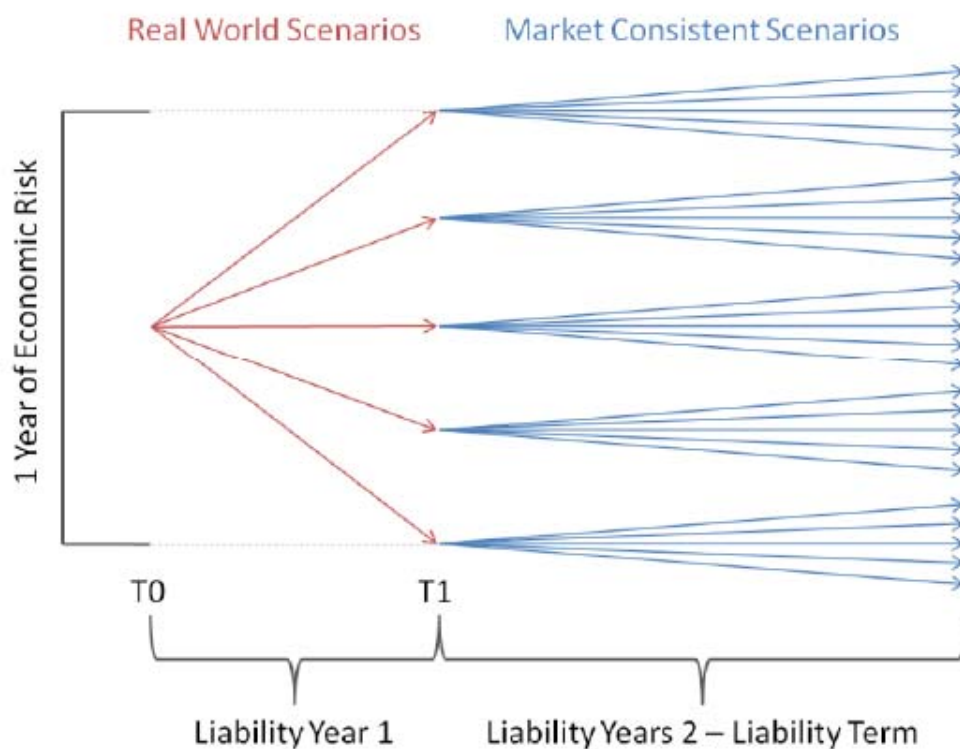
LSMC 法による基本的な資本計算は、ネステッド・ストキャスティクスと類似しています。何千ものリアルワールド前提 (アウター) のシミュレーションを 1 年分実行するのにはありますが、LSMC 法では、何千もの市場整合的 (インナー) シナリオを実行するのではなく、たった一つのインナー・シミュレーションだけを使用して負債を評価します。

当然ながら、シナリオを一つだけ使用した場合には、それぞれのリアルワールドのシナリオの時間軸 1 において、負債の評価が非常に不正確となってしまいます。しかし、この不正確な評価について回帰分析を実行することで (最小二乗と呼ばれる所以)、その不正確さを訂正します。負債の近似値を求めるために、不正確な評価ではなく回帰曲線が使われません。

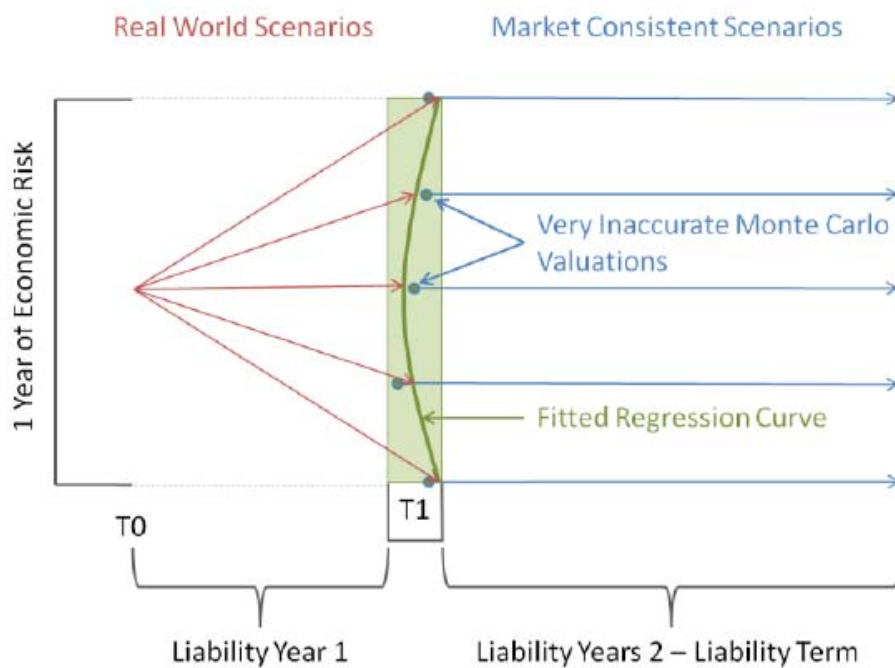
この回帰は多次元です。つまり、時間軸 1 のリスク要因の値は、回帰上では説明変数となっており、負債の値は反応変数となっています。その結果として生成される回帰曲線から、複数のリスク要因インプットの関数として負債の近似値が得られます。

回帰を行う方法は他にもありますが、分かりやすくするために、本シリーズのパート 2 で説明したカーブ・フィッティング法の例で使用したのと同じ多項関数のフィッティングについて検討します。この目的は、最適な回帰フィットを得られるような係数の値を探し出すことです。このプロセスを表したものが図表 1 です。

図表 1 : ネステッド・ストキャスティクスを用いた計算

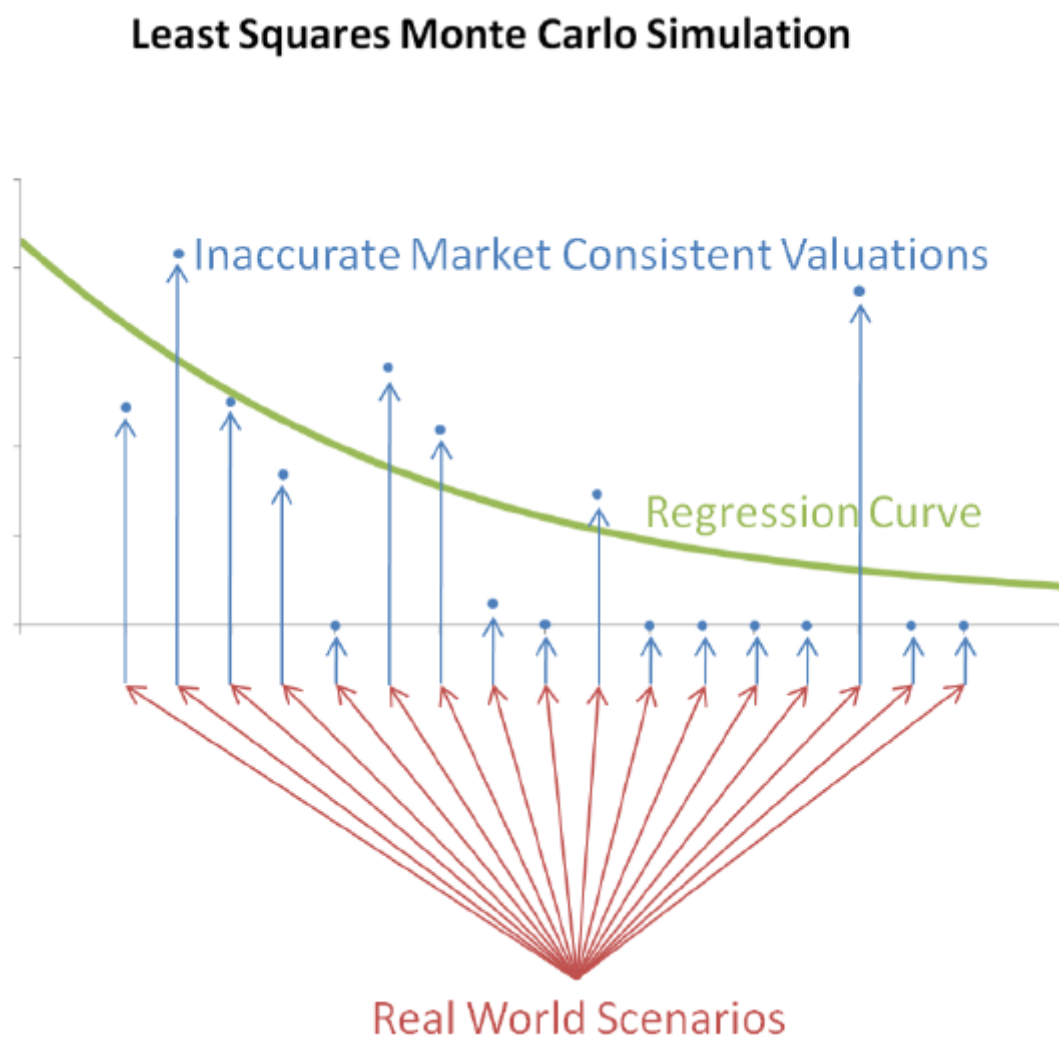


図表 1 b : 最小二乗モンテカルロ (LSMC) 法を用いた計算



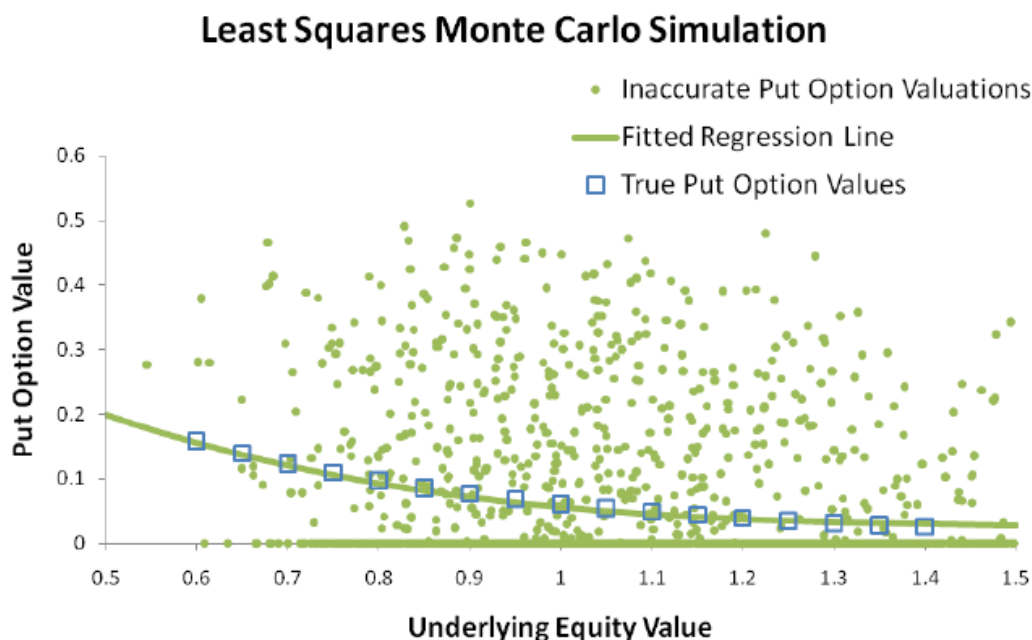
別の観点から見た場合、以下のようになります。

図表 2：最小二乗モンテカルロ（LSMC）法の図



これは非現実的な概念のように見受けられるかもしれませんが、実際に機能します。図表 3 は、例としてプットオプションに対し LSMC 法で予測したものを表しています。分かりやすくするため、株式リスクだけを考慮し、その他全ての変数が一定であると仮定します。

図表 3：プットオプションに対する LSMC 法を用いた場合のフィッティング



この図表に関し、特筆すべき特徴は以下の通りです。

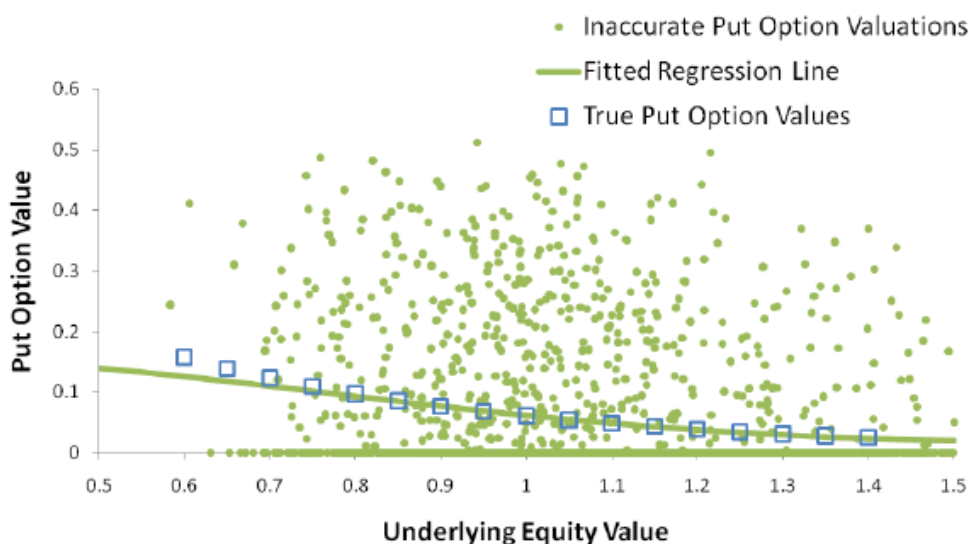
- ・ 本図表では 2,000 の最小二乗モンテカルロ・シナリオを表現。
- ・ x 軸は、時間軸 1 の原株式の価値を示す。
- ・ y 軸は、時間軸 1 のプットオプションの価値を示す（個々のシナリオに関して、時間軸 1 のプットオプションの価値は、各シナリオ上でディスカウントされたペイオフとなっている）。
- ・ 緑色の点は、市場整合的シミュレーションをそれぞれ 1 回実施した、非常に不正確なプットオプションの価値を表す。
- ・ x 軸上の点の広がり、1 年間のリアルワールド前提の株式リターンの分布と一致する。1.1 付近（1 年間で 10% の上昇）に多くの点が集中し、0.7 以下（30% の下落）では数が極端に減少する。株式の開始価値は 1。
- ・ 個々の点は価値が広範に広がっていることを表すものの、一般的な傾向としては、株式の開始水準がより低い場合、より多くの不正確な予測値が比例的に高い値を取る。プットオプションに関してはこの点は筋が通っている。
- ・ 緑色の線は、ドットを通じて得られた多項関数を表す。
- ・ 真のプットオプションの値はアナリティカルに計算され、青色の四角で表示される。回帰を使うと非常に正確な近似値が得られることが分かる。わずか 2,000 のシミュレーションだけを使って、株式リスク次元全体のあらゆるポイントでオプションを評価している点を踏まえると、目を見張るものがある。ネステッド・ストキャスティクスをカブ

くで行う場合、これと同じような結果を得るためには、2百万のシナリオを使用する（それぞれの評価に対し、インナーシナリオを1,000ずつ使用）。

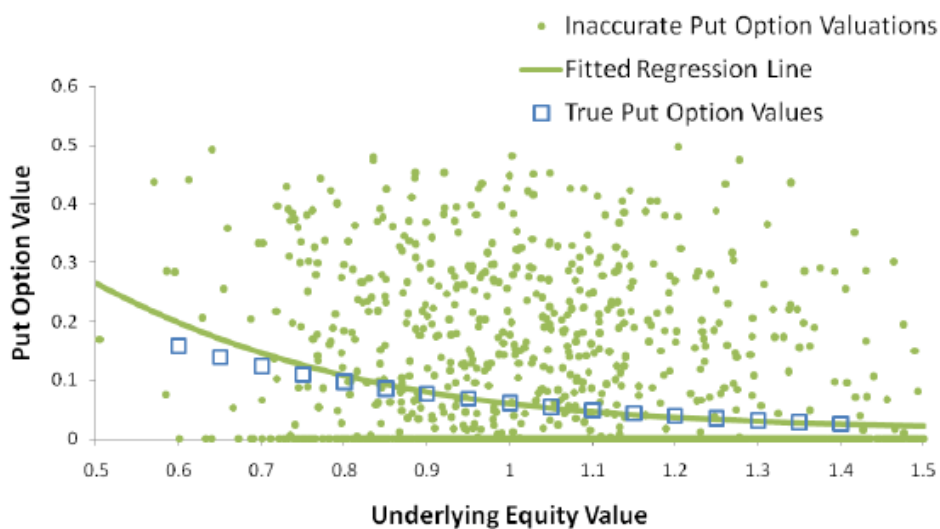
以上で説明した基本的な LSMC 法には改善の余地もあります。リアルワールド前提での分布のテール部分ではシナリオの数が少ないため、正確さが最も重要な回帰フィッティングにおいて大きな誤差が生じることがあります。

図表 4 は、図表 3 と同じ手法ではあるものの異なる乱数を使って生成した悪いフィットの例を二つ表しています。

### Least Squares Monte Carlo Simulation



### Least Squares Monte Carlo Simulation



上記2つの例のいずれにおいても、回帰曲線の中心部分は正確性を保つ一方、左側のテールのフィットは、シナリオの乱数度に非常に敏感になっていることが分かります。これは、ソルベンシー資本要件（SCR）の過大（または過小）評価につながる可能性があります（この単純な例では、ソルベンシー資本要件が、99.5%地点の最悪の株価シナリオ下の回帰関数の値となります）。

LSMC法でより正確性を求める場合、資本計算をフィッティング段階と予測段階の二つに分けることができます。

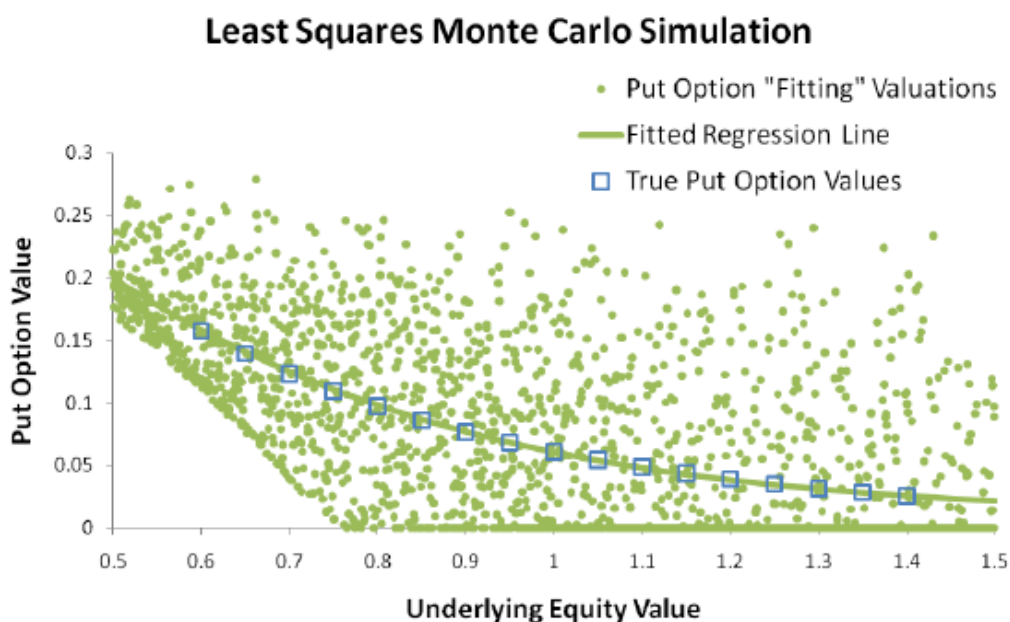
フィッティング段階では、広範な値に対し、負債の市場整合的価値が得られる負債関数を引き出します。

予測段階では、1年後の負債価値の分布を生成するため、負債関数上でリアルワールドのシナリオを実行します。

この二段階のプロセスには、資本計算に当たり、フィットを生成するために使用した場合よりも、より多くのリアルワールドのシナリオを使用することができるという付加価値があります（従ってALMモデルのランタイムを延長することなく、リアルワールドのシナリオ上のサンプリング誤差を排除することができます）。

フィッティングの方法は図表5の通りです。

図表 5 フィッティング・シナリオを使用したプットオプションの LSMC フィット



このシナリオでは、左側のテールの領域の点が増え、以前より広範な領域をカバーしています。

フィットを改善させるために別の工夫もしています。それぞれのフィッティング評価では、1つではなく2つのインナーシナリオを使用しています。2つのシナリオを使用することで、各フィッティング・ポイントでより正確な評価が得られ、統計的なノイズが減少し、より正確な回帰フィットにつながります（さらにシナリオの数を増やすと、ネステッド・ストキャスティクスのシミュレーションに近づきます）。フィッティング・ポイントの数は上述の例と同じ 2,000 ですが、各フィッティング・ポイントには2つのシミュレーションがあるため、結果的には 4,000 のシナリオを使用していることになります。

これら2つの点を改良することで、フィットの質は著しく改善されます。

この LSMC 法とカーブ・フィッティング法を比較してみましょう。2つの方法のいずれにおいても、カーブをあるフィッティング・ポイントにフィットさせ、資本計算を行うためにそのカーブ上でリアルワールドのシナリオを実行します。カーブ・フィッティング法では、比較的正確なポイントを少数使用しフィットさせます。LSMC では、不正確なポイントを多く使用してカーブにフィットさせます。この違いは些少なから重要です。

カーブ・フィッティング法では、カーブにフィットさせるため、各フィッティング・ポイ

ントの値を個別に使用しました。LSMC 法では、完全な回帰関数の値を満たすため、全てのフィッティング・ポイントを使用します。これにより、ALM シナリオに格納された情報を効率よく利用することができ、つまり、より短いランタイムでより正確な関数を見つけることができるようになります。

より多くのリスク次元が追加されることで、カーブ・フィッティング法に対して、LSMC 法の正確さが著しく増大します。

多くのリスク要因を抱えるソルベンシー資本要件の計算においては、スピードと正確さの両方が重要となるため、LSMC 法に圧倒的な軍配があがります。

LSMC 法を使用するメリットは他にもあります。

#### 初年のモデル化

ALM モデルの最初の年には、時間軸 1 の負債の価値に影響する複雑なダイナミクスが存在する可能性があります。例えば、株式の価値が 2 つのシナリオで同じであったとしても、そこに到達するまでに株式の価値は別の経路をとりうるため、負債の価値が異なる可能性があります。これは、ボーナス配分や経営側の行動が重要となる保険モデルに共通にみられる特徴です。

LSMC 法では、回帰における説明変数の数を増やすことで、こうした特徴を容易に考慮することができます。例えば、経済変数、資産配分率のようなモデル・ステート変数、ボーナス率等の経路を説明するために、より多くの変数を使用することができます。もちろんこれはカーブ・フィッティング法でも理論上では可能ですが、追加する一つ一つの変数がリスク次元を 1 つずつ増加させます。こうして追加された次元により、正確な関数にフィットさせ、この手法を実行可能にするために必要なストレスの数を増加させてしまいます。カーブ・フィッティング法を実務で採用する場合には、各ストレスにおいて最初の年にはある固定した経路を辿ると仮定することがより一般的で、経営規則のモデル化や戦略のリバランシングを不可能あるいは不正確にさせてしまいます。

また、LSMC 法は時間軸 0 または 1 の負債ストレスを定義する上でも、同様に上手く利用できる点も特筆しておきたいと思います。つまり、1 年間の経済リスクを伴う負債モデルにおいて、負債に対するストレスは即座に発生すると想定することができます。このことは、グループ全体の資本計算をする際、別の手法を統合する場合に有用かもしれません。



### 標準誤差の計算：

LSMC 法を使用することで、ソルベンシー資本要件の標準誤差を予測することができます。つまり、計算上、ランダム誤差がどの程度現れるか、また、要求された水準まで正確性を高めるためにはシナリオがどれだけ必要となるかを予測することができます。

カーブ・フィッティング法の場合、標準誤差を計算することは比較的困難です（フィッティング・ポイントの標準誤差を計算することは可能ですが、多くの次元におけるフィッティング・ポイント間で関数をインタポレーションすることでどのくらいの誤差が生じるかについては決して確信が持てません）。

### 非市場性のリスク：

LSMC 法による計算では非市場性のリスクを考慮することができます。これは、非市場性のリスク要因のシナリオをフィッティング・シナリオに追加し、これらを通常通り ALM 上で走らせるだけと非常に簡単に行うことができます。回帰関数が市場性および非市場性のリスク関数として生成されます。これらは、継続率、死亡率あるいはその他のリスクとなる可能性があります。

リアルワールドのシナリオにも、非市場性のリスク向けのシナリオが含まれる必要があるでしょう（非市場性のリスクの分布は、選択したどのソルベンシー資本要件の計算手法によっても特定されるか、または示唆されるでしょう）。

この非市場性リスクのシナリオベースの手法は、カーブ・フィッティング法の計算でも用いることができますが、ストレス・ポイントの数が増大するため、非実用的となる上、実務上近似値が多く使用されるため、誤差を生じさせてしまいます。

### 強固性：

LSMC 法には強固性があります。LSMC 法は、様々な事業部門や経済圏において、負債特徴に変化があっても利用できます。例えば、複雑なヘッジ資産や、経営側の行動を負債ブックに加えた場合、非単調なあるいは奇妙にみえる負債関数を生成することがあります。これらは、回帰のフィットがあらゆるシナリオに柔軟にフィットすべく変化するため、LSMC 法では自動的に対応されます。カーブ・フィッティング法を使用した場合、負債関数の形態を捉え、正確にインタポレートできることが確信できるよう、フィッティング・ポイントの数や位置を再評価する必要が生じます。これにはより多くの分析が必要となり、報告プロセスにおいて遅延リスクや不正確さを生じさせるなど、煩わしいプロセスとなってしまいます。

### 資本計算のロールフォワード：

計算報告を行った後、資本要件を再計算する必要があるかもしれません。例えば、報告日後一週間で株式市場が 10%下落した場合、負債と資本の価値への影響を直ちに知りたいと思うかもしれません。一から計算し直すのではなく、前回の計算をロールフォワードできたら便利です。

LSMC 法ではこれを簡単に行うことができます。

非常に広範に亘るリスクをそれぞれカバーするフィッティング・シナリオを選択する上、あらゆるリスク範囲に対する関数の正確性が高いため、当初のポジションとリアルワールド・シナリオを簡単にアップデートし、同じ関数を再利用することができます。新たに ALM を走らせる必要がないため、非常に短時間で実行することができます。

カーブ・フィッティング法では、より広範な領域をカバーするより多くのフィッティング・ポイントが必要となります(関数でカバーするよう試みるべき範囲は、全ての変数が 99.5%地点へ動いた後の 99.5%地点のストレスです)。また、インタポレーションはソルベンシー資本要件の計算の開始ポジションとその後のポジションに影響するため、その正確性の水準を上げるために各リスク次元における中間的なストレスがより多く必要とされます。

### 将来の資本要件の計算：

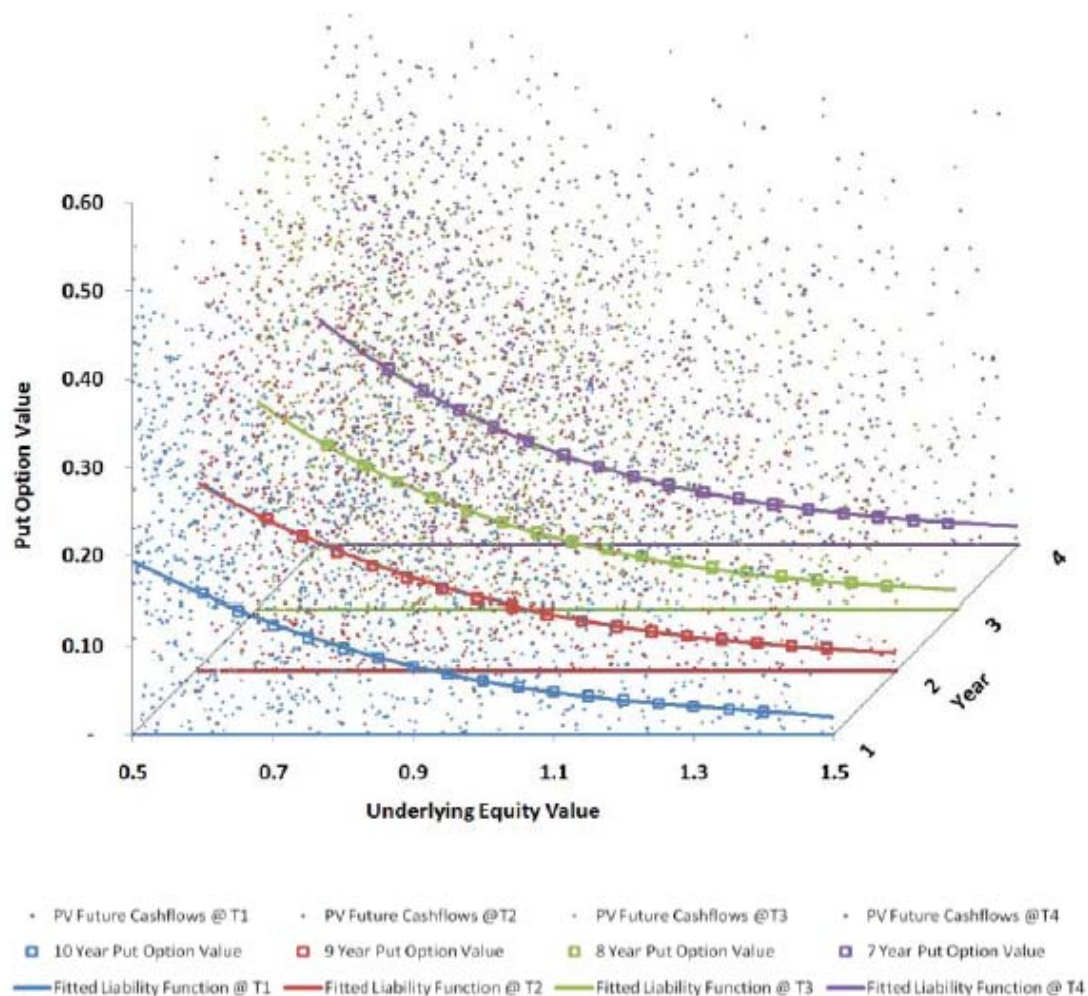
今日の資本を正確に計算することに加え、私たちは、将来資本がどのように変化するかに関心があります。

それは、自己リスクとソルベンシー評価法 (ORSA) を実施するためであるかもしれませんし、あるいは資本収益率やリスクマージンなどの分析を実施するためかもしれません。

ここにも LSMC 法の主なメリットがあります。

LSMC 法において、時間軸 1 の負債関数を得るために回帰を実施したことを思い出して下さい。回帰は将来のどの年でも実施することができます。そのため、将来どの年においても負債関数を得ることができます。

図表 6：時間経過に伴うプットオプションに対する LSMC 法によるフィット  
異なる将来の期間（色を変えて表示）において同じフィッティング・ポイント上で、どの  
ように回帰を実施できるかを表しています。



この場合もやはり、回帰フィットは実際のプットオプションの価値と非常によく対比できます（時間軸 2 の負債関数は、9 年物のプットオプションに、時間軸 3 では 8 年物のプットオプションになります）。

保険数理のモデル対象の単純なプットオプションより複雑である以上、将来の負債関数を正しくフィットさせるために、別の作業が必要となる場合があります。特に、将来の負債価値が直近の経済変数の価値だけでなく、そこに到達するまでの経路にも依存している場合にはなおさらです。これらの経路依存的な特徴は、経済変数の過去データ全てに依存している可能性があるため、負債関数のフィットが困難になる可能性があります。時間経過を通じて回帰を成功させることができるか否かは、負債評価に関連した過去の経路の特徴

を表現したモデル上で、状態変数を特定できるかによって決まります。

先ほどと同様に、カーブ・フィッティング法でもこの種のフィットは理論上可能です。しかし、要求されるストレスの数は、フィットさせる将来の期間の数に伴い増加します。経路を特定する問題は遙かに複雑になり、正確性の低下が激しくなります。これは 2 年を超える期間では実用的な方法ではなく、正確性が乏しくなります。

#### より広範な利用：

LSMC 法が提供する多年フィットの特徴のおかげで、LSMC 法は資本計算への利用に留まらず、ヘッジ、プライシング、会社側の行動の定義、資産配分の最適化等の幅広い分野で利用することができます。このような可能性を聞いただけでも、最も無感情な保険数理モデラーでさえ興奮し有頂天になることでしょう。

#### まとめ：

LSMC 法のスピード、正確性、柔軟性そして強固性のおかげで、保険会社の賢明な意思決定を妨げることなく、実際に役立つモデルを作成することができます。

これまで不適切なモデルを使用したことが原因で、企業は意思決定を後押しするために不完全で不正確な分析に頼って来ました。ソルベンシー II のモデリング・フレームワークの選択に当たって適切な決定を下すことが、企業をより良く機能させるために重要となります。悪い決定を下した場合、向こう何年にも亘って古い問題に悩まされることになるでしょう。

本稿では、LSMC 法がいかにより効率的且つ有用なカーブ・フィッティングの導入となり得るか、また、ネステッド・ストキャスティクスのモデルのランタイムを意思決定に利用できる水準までどのように大幅減少させることができるかについて検討してきました。

次回は、ソルベンシー資本要件計算のための複製ポートフォリオ手法についてお話したいと思います。

(了)

著作権表示©2011年 Moody's Analytics, Inc. ならびに（あるいは）ムーディーズのライセンサーおよび関連会社（以下総称して「ムーディーズ」という）

本書に記載する情報はすべて、著作権法により保護されており、いかなる人物も、いかなる形式、方法、手段によっても、これらの情報（全部、一部を問わず）を、ムーディーズの事前の書面による同意なく、複写、もしくはその他の方法により再生、複製、送付、譲渡、頒布、配布、転売、またはこれらの目的で使用するために保管することはできません。本書に記載する情報はすべて、ムーディーズが正確かつ信頼しうると考える情報源から入手したものです。しかし、人間および機械による誤り、ならびにその他の要因があり得るため、ムーディーズはこれらの情報をいかなる種類の保証もつけることなく「現状有姿」で提供しており、とりわけ、これらの情報の正確性、速報性、完全性、商品性、および特定の目的への適合性についてはいかなる表示または保証（明示的、黙示的を問わず）も行いません。ムーディーズはいかなる状況においても、またいかなる人物または法人に対しても、以下の (a) (b) について一切責任を負いません。(a) これらの情報の入手、収集、編纂、分析、解釈、伝達、公表、配布に関わる誤り（不注意によるか、その他によるかを問わず）またはその他の状況や偶発事象により（全部、一部を問わず）引き起こされ、発生し、もしくはそれらに関する損失または損害（このような損失や損害がムーディーズ、あるいはその取締役、役職員、従業員あるいは代理人の支配力が及ばない事態に起因するかどうかを問わない）。(b) これらの情報の使用または使用の不可能により発生する、あらゆる種類の直接的、間接的、特別、二次的、要補償、または付随的損害（このような損害には逸失利益を含む。またこのような損害の可能性についてムーディーズが事前に通告を受けたかどうかを問わない）。本書に記載される信用格付け、財務報告分析、予想、およびその他の観測（含まれる場合）は、ムーディーズの意見の表明であり、またそのようにのみ解釈されるべきであり、これを事実の表明、もしくは証券の購入、売却または保有の推奨とみなしてはなりません。ムーディーズは、いかなる形式、または方法によっても、これらの格付けもしくはその他の意見または情報の正確性、速報性、完全性、商品性および特定の目的への適合性について、いかなる保証（明示的、黙示的を問わず）も行っていません。本書に記載する情報の利用者またはその代理人は、投資決定において、それぞれの格付けまたはその他の意見を、一つの要因としてのみ取り扱うべきです。従って、各利用者は購入、保有または売却を検討する各証券、ならびに各証券の発行者、保証人、および信用補完提供者について、自ら研究・評価しなければなりません。