

## カーブ・フィッティング法を使用した資本計算の改善

ムーディーズ・アナリティックス / Barrie & Hibbert 部門

Adam Kousaris

[Adam.Kousaris@barrhibb.com](mailto:Adam.Kousaris@barrhibb.com)

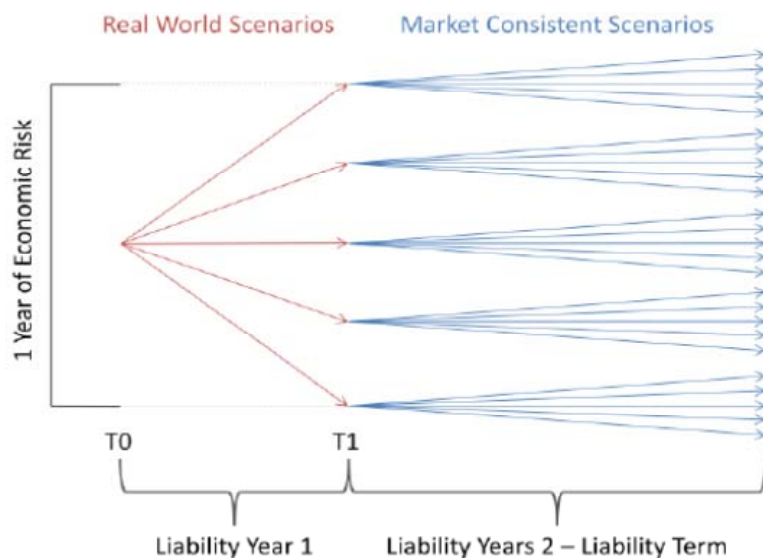
本シリーズの第 1 回目では、複雑な負債の種類に対する 1 年間のバリュエーション・アット・リスク資本計算を行うために、ネステッド・ストキャスティックな計算がいかに必要かについて考察しました。また、共分散マトリクス法を使用すると、資本価値が誤って計算される可能性があることについても検討しました。

今回は、資本計算を改善するために、カーブ・フィッティング法の利用について検討したいと思います。インターポレーションを使用してネステッド・ストキャスティックな計算を加速するというのが、ここでの基本的な考え方となります。これは、以下の 2 つの理由から共分散マトリクス法からの改善となります。

1. 向こう 1 年間で直面する経済上の（および他の）リスクを表すために、限定的な分布一式ではなく、リアルワールド前提のモンテカルロ・シナリオが多数含まれたシナリオ式を使用することができる。こうすることで、企業が直面する個々のリスクの動向とそれらが一緒になった場合の動向に対し、より内容の濃い想定をすることができるようになる。
2. 共分散マトリクス法に内在する線形想定よりも正確に負債の概算を行えるようになる。

要するに、ネステッド・ストキャスティクスでは、リアルワールド前提のシナリオを数多く生成し、各シナリオの最初の年の最後に、市場整合的なシナリオ式を使用して企業の資産および負債を評価します。このことを図で表したのが図表 1 です。

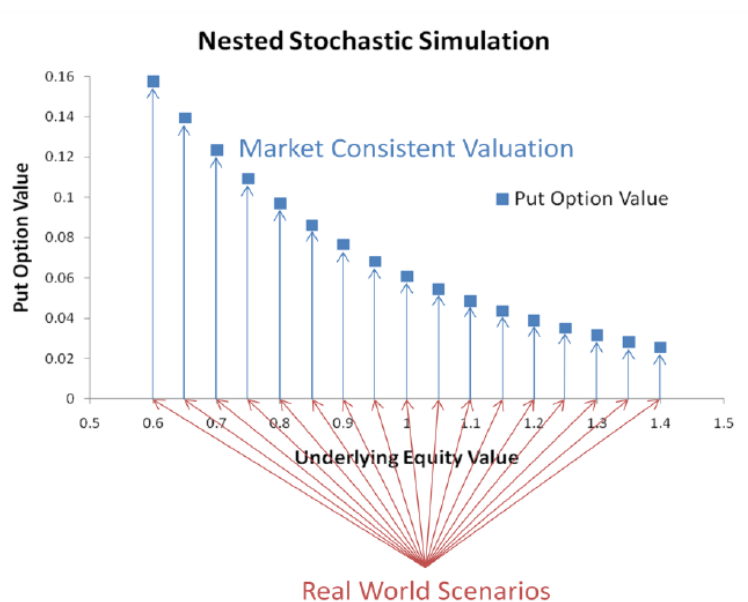
図表1 ネステッド・ストキャスティックなシミュレーション



リアルワールド前提の各シナリオは、1年後の経済条件の状態を表しています。市場整合的（インナー）シナリオは、そうした状態における事業価値を計算します。これを別の角度から表現することもできます（図表2）。

（図表2） ネステッド・ストキャスティックなシミュレーション

右側の図表は、唯一のリスクが株価に起因する単純なプット・オプションのプロセスを表したものです。



プット・オプションのように、企業の価値は、単に経済リスク要因の（非常に複雑な）関数に過ぎません。つまり、リアル・ワールド前提の2つのシナリオがほぼ同じ場合、負債

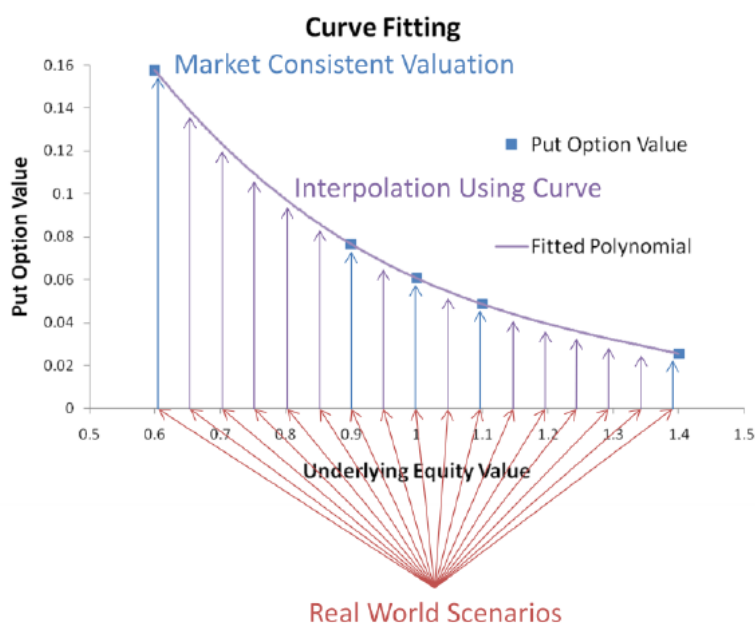
の市場整合的価値も非常に似通ったものになることは既に分かっています。しかし、ネス  
テッド・ストキャスティクスにおいては、それら両方のシナリオにおいて負債を再評価す  
るために市場整合的なモンテカルロ・モデルを使用することになり、極めて非効率的です。

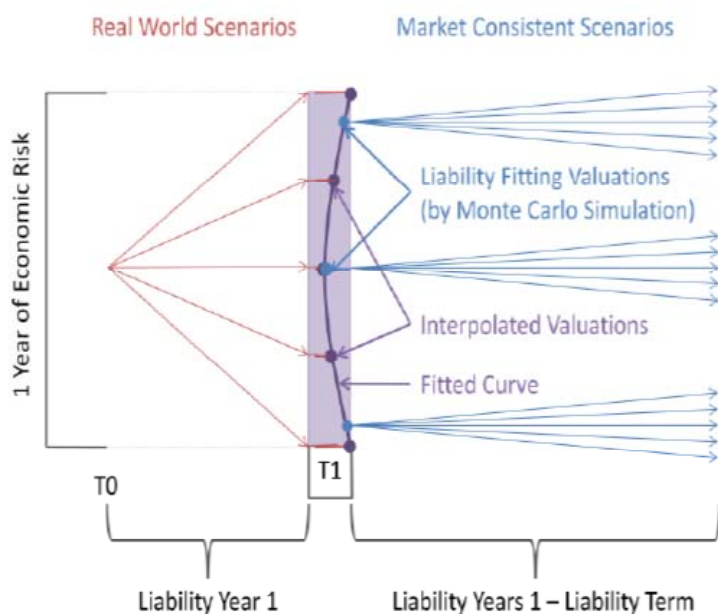
負債の価値をいくつかの重要なポイントで推計し、公式を使用してそれらをインターポー  
レーションすれば、時間節約のために単純化できます。そのためには、経済リスク要因に対  
し多くの瞬間的なストレスを与え、それぞれのストレスに対して負債を評価します。この  
時、関心のあるリスク領域をカバーするようなストレスを選択します。それから、既に計  
算したポイントを通じて多次元公式をフィットさせます。この公式は、区分線形インター  
ポレーションであるかもしれませんが、標準的な多項式、あるいはより複雑な公式である  
可能性もあります。それから、ストレスをかけたポイントを捨て去って、フィットさせた  
カーブが真の負債関数を表していると想定します。

こうして、資本計算は単純化されました。各リアルワールド前提のシナリオにフィットさ  
せたカーブを使用し、1年後のバランスシートを評価します。99.5 パーセントイルの最悪  
の結果が所要資本となります。

図表3は、この単純化プロセスを表したものです。

図表3 カーブ・フィッティング・シミュレーション





保険会社のポートフォリオには、多くのリスクタイプが含まれています。従って、多次元カーブをフィットさせるプロセスが必要となります。例えば、負債  $L$  は、リスク要因  $R_1$  から  $R_k$  までのオーダーが  $N$  の標準的な多項式であると想定します。

二つのリスク要因に関し、オーダーが3の多項式は、

$$L(R_1, R_2) = a_1 + a_2 R_1 + a_3 R_1^2 + a_4 R_1^3 + a_5 R_2 + a_6 R_2^2 + a_7 R_2^3 + a_8 R_1 R_2 + a_9 R_1^2 R_2 + a_{10} R_1 R_2^2$$

定数
リスク1の項
リスク2の項
パワー2の交差項
パワー3の交差項

従って、負債関数にフィットさせる係数は9つになります。係数を求めるためには、負債関数上に未知数と同じくらい多くのポイントが必要となってきます。モデルの中にあるリスク要因の当初の値を変更し、負債を再評価することでこれらを算出することができます。

リスク要因または多項式のオーダーの数が、フィットの正確性をいかに改善させるかは容易に把握できます。これはまた、関数の項の数、つまり、求める必要のある係数の数や実行する必要のある負債の再評価の数も大幅に上昇させてしまいます（ここですぐに急上昇してしまうのは交差項です）。

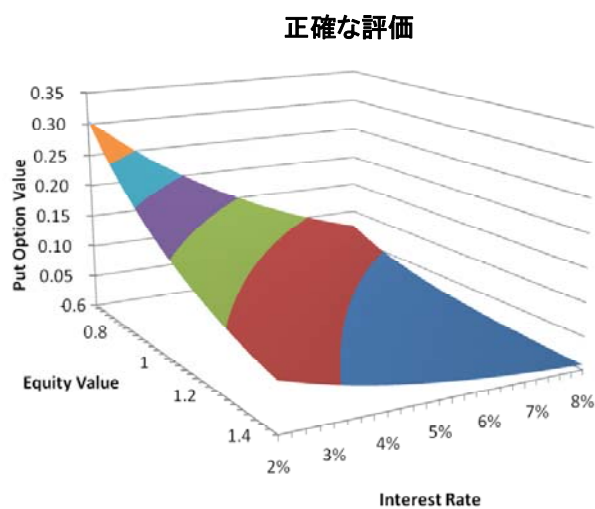
この手法では、リスク要因の数が多い場合、ネステッド・ストキャスティクスを用いた計算と同じくらい時間がかかる可能性があります。計算時間を短縮させるために、通常、重要度が比較的低い係数の大半をゼロとみなし、それから比較的小さい数のストレスを実行

して、ゼロでないパラメータを求めます。省略する項としては通常、より線形の、あるいは負債の価値に対する影響が比較的少ない、高次のオーダー交差項や変数の高次項などが該当します。

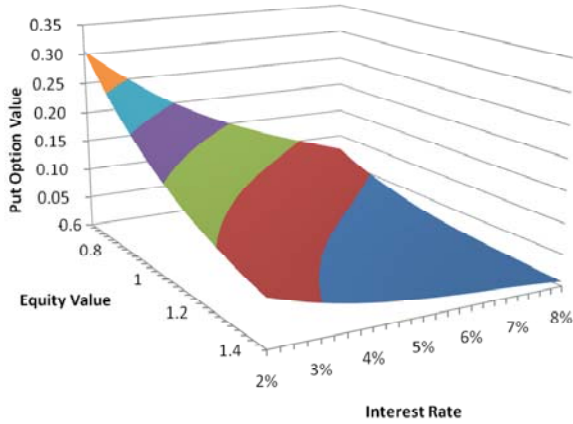
事業の収益と損失の両方に対する正確な関数が分かればベストです。そうすれば、その関数が後々再利用された場合により正確になり、事業の別の部分にプラスとなり、異なる事業のブックを合計することがより簡単になります。

再びバニラ・プット・オプションについて検討します。以下の図表4は、正確な評価と、フィッティング・シナリオをそれぞれ10個と20個使用した場合の多項式フィットの例を比較したものです。図表5は、より多くのポイントを使用してフィットを形成することで、近似値のエラーがいかに減少するかを表したものです。フィッティングには、株価と金利リスクの二つのリスク要因を使用しています。

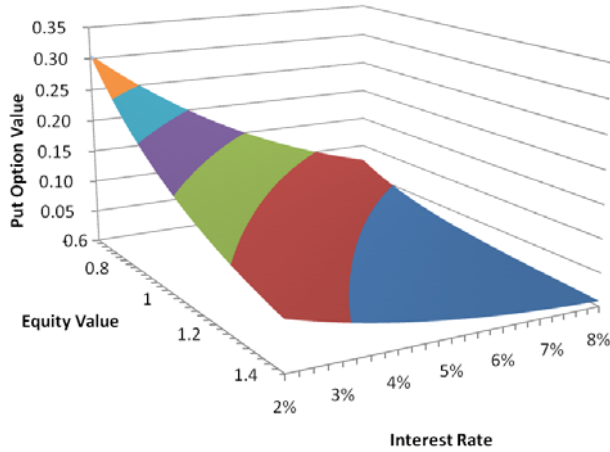
**図表4 プット・オプションに対するカーブ・フィッティングの近似値**



### 10個のストレスポイントに対するフィット



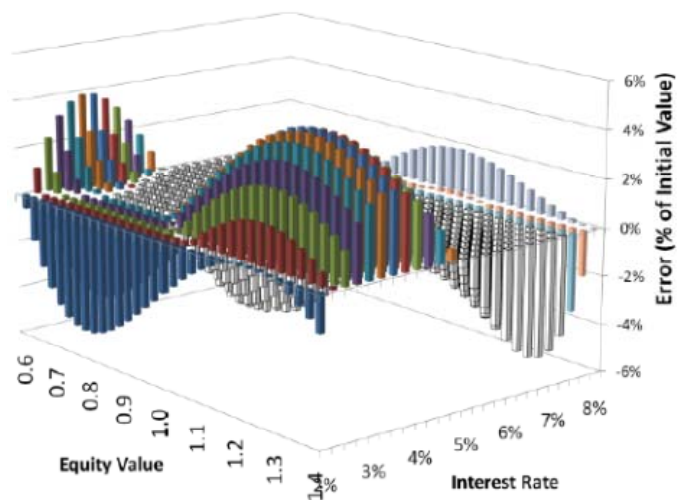
### 20個のストレスポイントに対するフィット



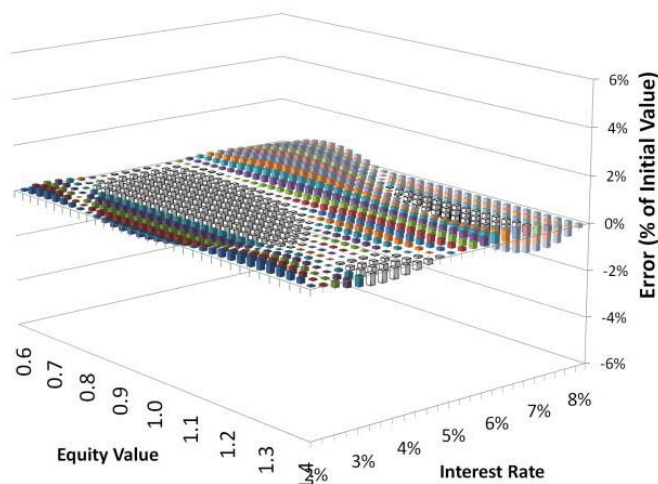
図表5 プット・オプションに対するカーブ・フィッティング近似値のエラー

#### 近似値のエラー(10個のストレスポイント)

この図表は、フィットを形成するためにより多くのポイントを使用することで、近似値のエラーが減少する様子を表したものです。フィッティングには、株価と金利リスクの二つのリスク要因が使用されています。



### 近似値のエラー(20個のストレスポイント)



全体的に見ると、カーブ・フィッティング法はうまく機能し、資本計算を正確に実施すると見られます。しかしながら、以下のようにいくつかの問題も残されています。

#### ランタイム

確信の持てる良いフィットを得るためには、多くのフィッティング・ポイント（ストレス下の再評価）が必要となります。多くのリスク次元に亘ってフィットが実施される場合にはなおさらです。実際の多くの保険会社の問題では、フィッティング・ポイントは数百単位で必要となります。

#### サンプリング・エラー

モンテカルロ・モデルを使用してカーブ上のポイントを推測するときは必ず、サンプリングエラーがいくつか発生します。つまり、本当の価値に近いポイントを通してカーブをフィットさせていることとなります。カーブ上のどこにおいても良好なフィッティングを得るために必要とされるストレスの数は多いため、各ストレスに対し多数のシミュレーションを使用することは望ましくありません。これには、ストレスを実行する際、コントロール変数や準乱数のような変数減少法を使用すると便利です。

#### 使用するポイントの選択

使用するストレスの規模、各リスク要因のストレスの数、統合ストレスのロケーションを選択するためには業務上の判断が必要となります。異なったストレスを使用すると、資本の概算も異なってくる可能性があります。加えて、負債の性質は、金利、保証のストライクプライスに対する位置関係、既存の保険契約の変化、新しい保険の販売などにより時間とともに変化するため、時間が経過しても正確性が崩れない経験則を築くのは困難な場合

があります。

### 初年のモデリング

その年の負債モデルをロールフォワードするのは複雑な場合が多いため、1年間の経済リスクを基に資本計算をし、この変化が（ゼロの時間軸で）負債に瞬時に適用されると想定します。これは、カーブ・フィッティング法においては大きな欠点となる場合があります。例えば、経営層の行動あるいはダイナミック・ヘッジによってリスクを制御する場合、最初の年に経済が辿るパスが資本決定に重要な要素となる可能性があります。時間軸0の負債ストレスを使用するということは、ネステッド・ストキャスティクス・モデルの場合と異なり、リスク緩和ストラテジーの効率性に対する想定を単純化せざるを得ないということを意味します。ヘッジ資産と会社側の行動に複雑な相互作用がある場合、この問題が悪化することがあり、リスクマネジメントに関する誤った判断につながる可能性があります。

### フィッティング関数

フィッティングに使用する関数の選択によっても、計算結果に違いが生じる可能性があります。考察が最も単純なのは、標準的な多項式です。但し、これらは、フィッティング・ポイントを通る一方で、時折、真の関数の前後で大幅に振動することがあります。スプラインや他の関数形式あるいは回帰ベースの手法を使用することで、大方この問題は解決されます。

### エラー予測

サンプリング・エラーの組み合わせや関数形式の仕様、フィッティング・ポイントの選択が不確実であることは、資本計算において潜在的なエラーの規模を推測することが困難ということを意味します。

以上をまとめると、資本計算においては、カーブ・フィッティング法が共分散マトリクス法より遙かに優れているものの、カーブをフィットさせることが困難となったり、必要とされる計算量が過剰な負担となるというような問題があります。

次回の第3回目のレポートでは、カーブ・フィッティング法の多くの問題を克服するために、どのように最小二乗モンテカルロ法を利用できるかについて考察します。

(了)



著作権表示©2011年 Moody's Analytics, Inc. ならびに（あるいは）ムーディーズのライセンサーおよび関連会社（以下総称して「ムーディーズ」という）

本書に記載する情報はすべて、著作権法により保護されており、いかなる人物も、いかなる形式、方法、手段によっても、これらの情報（全部、一部を問わず）を、ムーディーズの事前の書面による同意なく、複写、もしくはその他の方法により再生、複製、送付、譲渡、頒布、配布、転売、またはこれらの目的で使用するために保管することはできません。本書に記載する情報はすべて、ムーディーズが正確かつ信頼しうると考える情報源から入手したものです。しかし、人間および機械による誤り、ならびにその他の要因があり得るため、ムーディーズはこれらの情報をいかなる種類の保証もつけることなく「現状有姿」で提供しており、とりわけ、これらの情報の正確性、速報性、完全性、商品性、および特定の目的への適合性についてはいかなる表示または保証（明示的、黙示的を問わず）も行いません。ムーディーズはいかなる状況においても、またいかなる人物または法人に対しても、以下の (a) (b) について一切責任を負いません。(a) これらの情報の入手、収集、編纂、分析、解釈、伝達、公表、配布に関わる誤り（不注意によるか、その他によるかを問わず）またはその他の状況や偶発事象により（全部、一部を問わず）引き起こされ、発生し、もしくはそれらに関する損失または損害（このような損失や損害がムーディーズ、あるいはその取締役、役職員、従業員あるいは代理人の支配力が及ばない事態に起因するかどうかを問わない）。(b) これらの情報の使用または使用の不可能により発生する、あらゆる種類の直接的、間接的、特別、二次的、要補償、または付随的損害（このような損害には逸失利益を含む。またこのような損害の可能性についてムーディーズが事前に通告を受けたかどうかを問わない）。本書に記載される信用格付け、財務報告分析、予想、およびその他の観測（含まれる場合）は、ムーディーズの意見の表明であり、またそのようにのみ解釈されるべきであり、これを事実の表明、もしくは証券の購入、売却または保有の推奨とみなしてはなりません。ムーディーズは、いかなる形式、または方法によっても、これらの格付けもしくはその他の意見または情報の正確性、速報性、完全性、商品性および特定の目的への適合性について、いかなる保証（明示的、黙示的を問わず）も行っていません。本書に記載する情報の利用者またはその代理人は、投資決定において、それぞれの格付けまたはその他の意見を、一つの要因としてのみ取り扱うべきです。従って、各利用者は購入、保有または売却を検討する各証券、ならびに各証券の発行者、保証人、および信用補完提供者について、自ら研究・評価しなければなりません。