

Moody's Analytics / Barrie & Hibbert  
Insight シリーズ (第 4 回)

複製ポートフォリオ入門

ムーディーズ・アナリティクス / Barrie & Hibbert 部門

Adam Kousaris

Adam.kousaris@barrhibb.com

保険会社は現在、ソルベンシー資本要件に関し、ネストテッドストックキャストティックに関連する問題に直面しています。本シリーズの前 3 回のレポートでは、ソルベンシー資本要件の計算に利用できる様々な手法について見てきました。今回は複製ポートフォリオ法についてお話したいと思います。

近年、保険会社の間では、複製ポートフォリオに対する関心が高まっています。しかし、そうした高い関心がある中でも、保険会社、規制当局、コンサルタントやアナリストの間では、複製ポートフォリオを作成し利用するために必要な黒魔術的な保険数理技術に対し不信感を抱いているのも事実です。

そこで、複製ポートフォリオがどのように利用されているか、また、その課題や制約等を以下で説明していきたいと思います。本稿は、いわば複製ポートフォリオの入門書に当たり、保険会社の資本計算への実際の適用方法に関しては次回触れたいと思います。

まず、基本的な概念と専門用語についてお話します。

複製手法は、現代金融における根底をなしており、ブラック・ショールズ・マートン・オプション・プライシング・モデルや日々のプライシング、ヘッジ、リスクマネジメントにおける様々なアプリケーションにとって不可欠な要素となっています。

別の資産や負債と同じキャッシュフローを常に生み出す資産ポートフォリオを見つけだすことができるのであれば、この両者は同価値でなければならない、という理論に基づいています。アービトラージ不在の原理を想定する際、この単一価値の法則が意図されています。

では、この複製の概念が、保険資本のモデル化にどのように有用なのでしょう？

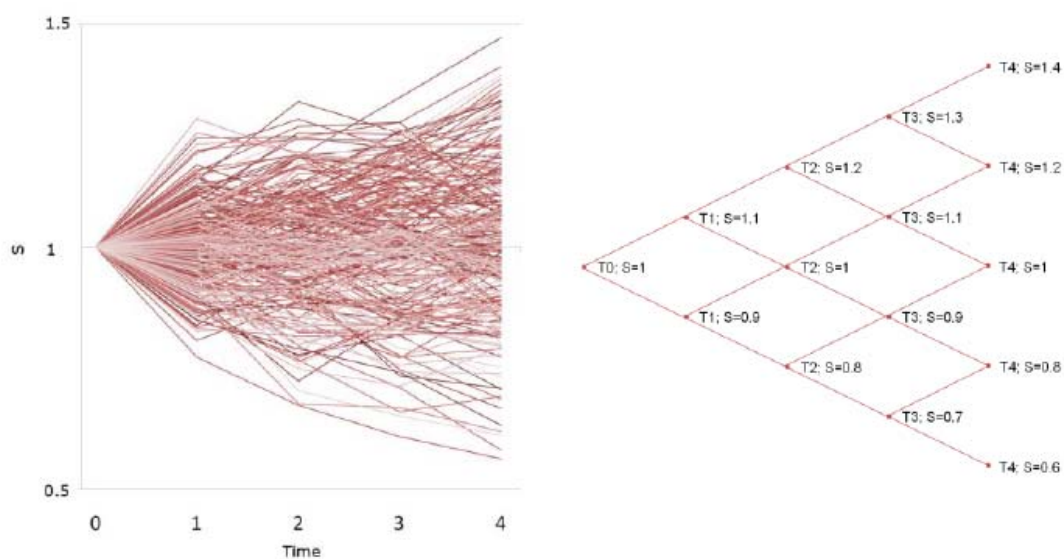
## 資本計算における複製ポートフォリオ

負債キャッシュフローをいかなる将来の世界経済動向においても厳密に複製できる資産ポートフォリオがあれば、そのポートフォリオを負債を評価するために代用できます。つまり、資本要件の計算に当たっては、旧来の ALM モデル上で複雑な確率論を走らせるのではなく、複数のリアル・ワールドのシナリオ下における資産ポートフォリオを再評価するだけで済むようになります。

では、早速単純な複製から始めてみましょう。

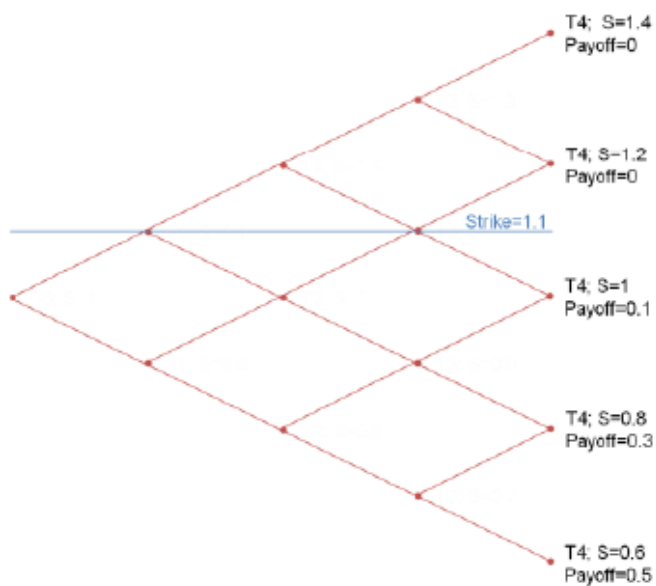
このような問題に対しては、二項分布ツリーが有用です。これは、デリバティブのプライシングによく利用されるツールで、モンテカルロ評価法と類似していますが、変数のランダムなパスを予測する代わりに、ある一定数の考えられる値のノードや考えられる移動の分岐を構築します。

図表 1：株式 (S) の価格 (ツリー式とモンテ・カルロ式)



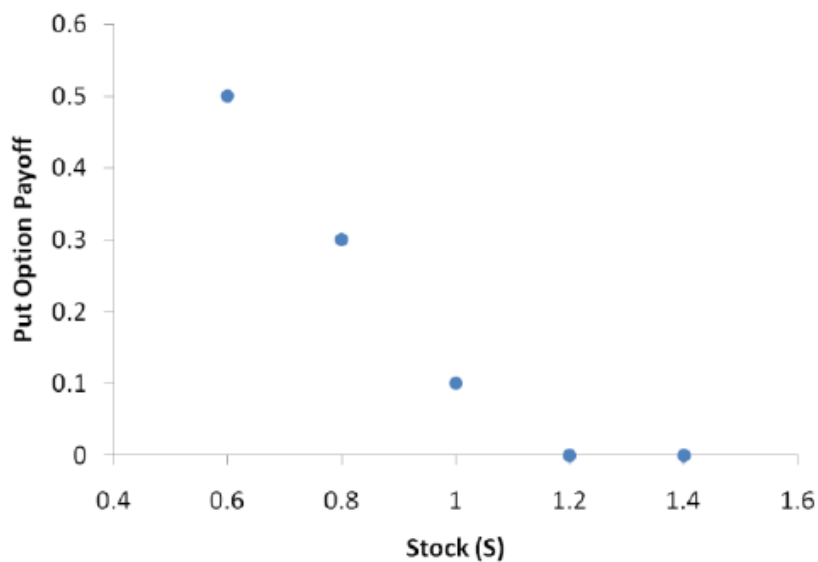
では、例えば株式 S に対する期間 4 年のプット・オプションを 1.1 のストライク・プライスで売ると仮定しましょう。オプションのペイオフは以下のようなツリー形式で表示されます。

図表 2 : プット・オプションのペイオフ



時間軸 4 の時点における、株価に対する各ノードのオプションのペイオフを図表にすることができます。

図表 3 : プット・オプションのペイオフ～ノードと株価

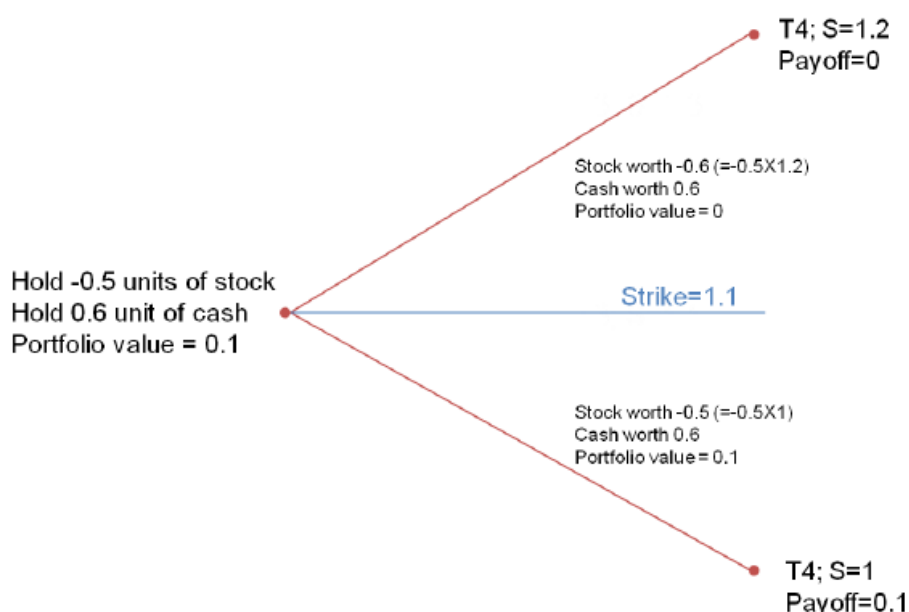


これらのペイオフが、複製しようとしている負債キャッシュフローです。

### ダイナミックな複製

時間軸 3 の各ノードは、時間軸 4 において 2 パターンのペイオフとなる可能性があります。時間軸 4 で考えられるペイオフのいずれかを正確に複製するため、時間軸 3 の各ノードでどれくらいの株式やキャッシュが必要となるかについては、単純な公式に沿って計算できます。これは、2つの自由変数（キャッシュと株式のウェイト）を用いて2つの状況に関するペイオフを求める問題にすぎず、実に単純なものです。ツリーのセグメントについては、以下に記します。

図表 4：ダイナミックな複製プロセス



それから、時間軸 3 のノードにおけるポートフォリオの値を目標ペイオフの値として使用し、ツリーに沿って時間軸 0 に至るまで逆算します。時間軸 0 における保有株およびキャッシュが、現在の複製ポートフォリオになります。このポートフォリオを保持し、手順に従えば、キャッシュフローをいつでも正確に複製できます。さらに同じ手順を使って（ここでは概念の中心ではありませんが、完全市場や連続拡散のような簡素化した想定の下）、このツリー上に作成できるキャッシュフロープロファイルをいつでも複製することができます。

この単純な例では、株（原資産）を利用し複雑なペイオフがどのように複製できるかを示しています。複製コストは、必要保有資産から簡単に計算することができます。

世界経済情勢に従って将来的にポートフォリオの保有状況を調整することから、当社では

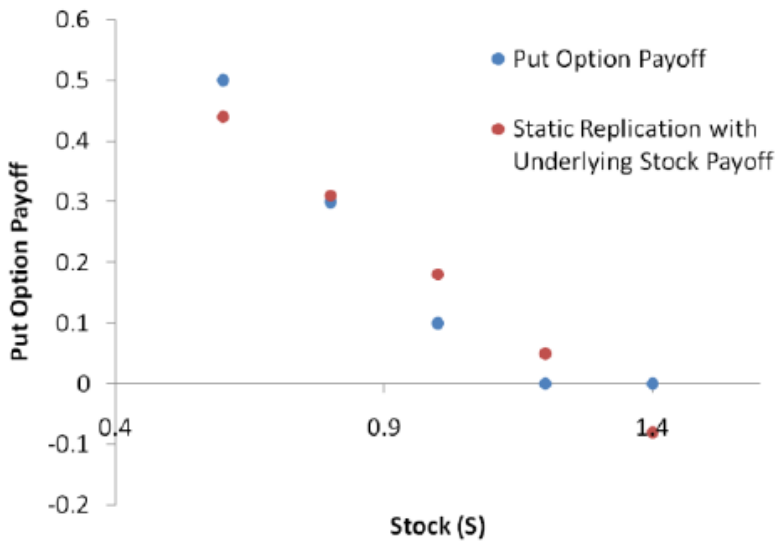
これをダイナミックな複製と呼んでいます。

### 原資産を使用したスタティックなスタティックな複製

対照的にスタティックな複製では、キャッシュ・ペイオフのために満期まで資産ポートフォリオを保有する、または、あらかじめ設定された日付で売却すると想定します。

上記と同様の例を使って、リバランスなしで全 4 年間ポートフォリオを保有しなければならないと仮定しましょう。その場合でも、最良の複製ポートフォリオを見つけることはできますが、キャッシュフローを正確に適合させることは決してできません。もし、キャッシュフローの二乗誤差を最低限に抑えるものが、最良のポートフォリオであると定義するならば、キャッシュを 0.83 ユニット、株式を -0.65 ユニット保有することで最良のポートフォリオが生成出来ます。考えられる 5 つのノードにおけるペイオフは、図表 5 の通りです。

図表 5 : 株（原資産）を使用したスタティックな複製



この図表にはいくつか興味深い点があります。相当の一致 (90%の  $R^2$ ) は見られるものの、複製ポートフォリオは最悪のシナリオ下では上手く適合せず、従ってリスクを過小評価してしまう可能性があります。しかも、スタティックな複製ポートフォリオを購入するコストは 0.18 と、ダイナミックな複製ポートフォリオの 0.14 と比較し 25%も高くなります。

ペイオフが 0 より大きくなるなどのある一定のシナリオ下だけにおいて、最良なフィッティングを求めようとすることはできますが、そうすると他の部分のシナリオ下のフィッテ

イングが崩れてしまいます。

この定型化した例の中で、2、3 重要な点を実証することができます。

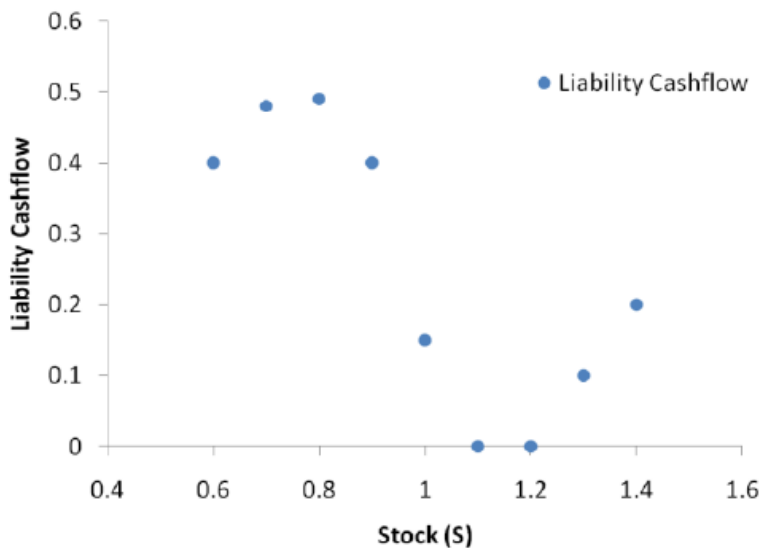
- ・ 利用する資産を単純なものに限定すると、統計的に負債を複製することができない場合があることを意味する。
- ・ 最良なフィッティングを定義する方法が重要である。
- ・ フィットしたキャッシュフローの誤差は、負債と複製ポートフォリオの価値の違いにつながり、その誤差は増幅される可能性がある。

では次に、利用できる資産の種類と複製したいキャッシュフローの種類の制約を緩和してみよう。

#### より複雑なペイオフと金融商品を使用したスタティックな複製

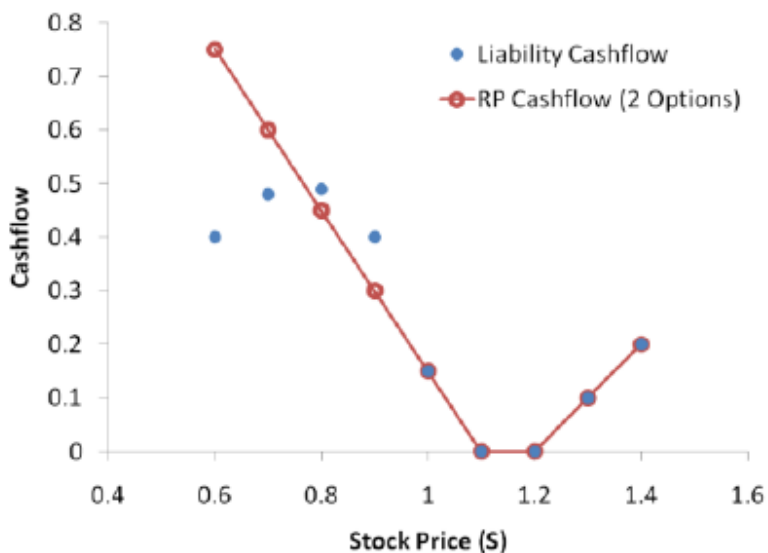
以下の図表のように非常に複雑なペイオフをスタティックに複製したいと仮定しましょう。

図表 6：複雑な負債キャッシュフロー・プロファイル



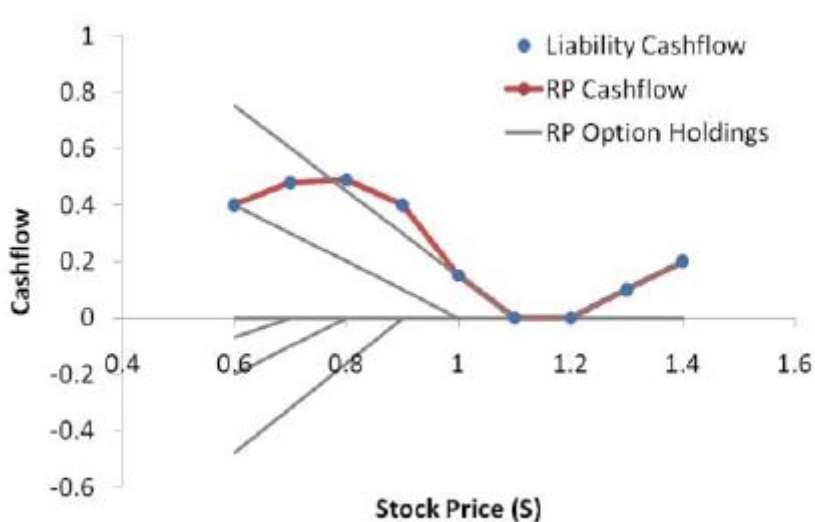
これは、権利行使価格が異なるプット・オプションとコール・オプションを一組使って実行することができます。行使価格 1.2 のコール・オプションと、行使価格 1.1 のプット・オプションを正しい割合で使用すると、以下のようなペイオフ・プロファイルが作成されます。

図表 6-a 二つのオプションとの適合



オプションをさらに追加すると、負債キャッシュフローに正確に適合させることができます。最終的な複製ポートフォリオのキャッシュフロー・プロファイルやそれを構成しているオプションは、以下の図表のとおりです。

図表 7: 6つのオプションとのフィット



オプションを十分に追加することで、考えられるキャッシュフローのいずれにもフィットさせることができます。これは、直感的に理にかなっています。つまり、非常に粒度の細かい区分線形関数を使えば、どんな関数も複製できるということです。ここでは、区分線

形関数はバニラプット／コール・オプションの屈折ペイオフ・プロファイルから作成していますが、他の種類の関数も広く使用することができます。例えば、デジタル・オプションを使用すると、ステップ関数を使ったプロファイルを複製できます。

プットとコールを使うメリットは、それらが評価しやすく、比較的頻繁に取引されている点です。こうした資産から複製ポートフォリオを作成することができれば、市場データを利用してプライシングすることができます。エキゾチック・オプションや難解な関数を使用した場合には、それらを別の手法（例えば、モンテ・カルロ・シミュレーションの利用等）で評価する必要性が生じる可能性があります。

以上の分析から以下のような重要な教訓が導き出されます。

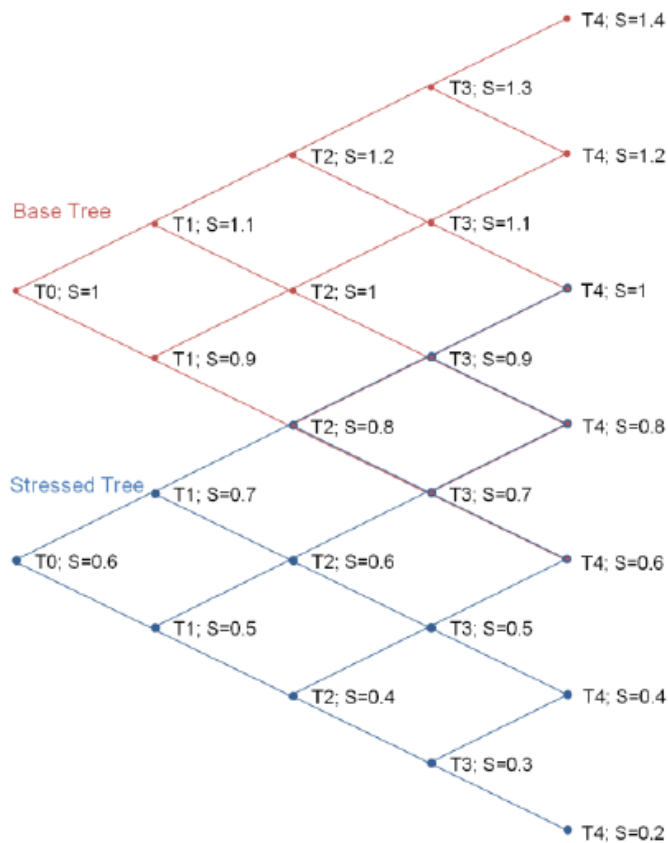
- 一つの原資産リスクに依存する非経路依存型負債に関しては、十分な資産や関数を使用すれば、どんな負債ペイオフも複製することが可能。
- より洗練されたソリューションでは、複製しようとしている負債のペイオフに似た関数を使用する。こうすることで、より少ない資産で広範に複製することができ、実際に観測されるノード間のスペースが巧みに表現されているとの確信が高まる可能性がある。
- フィットしたノードがより多くあれば、より緻密な負債の複製ができる（あるいは少なくとも複製に対する確信が高まる）。
- フィッティングや原負債のペイオフに使用する関数に、実際の具体例を引用する必要なし（これらは単に線を辿るツールに過ぎないため）。
- 完全なフィッティングは珍しくはない。種類の異なるオプションやペイオフを多く利用することで、負債のキャッシュフローを一律に正確に表現することが可能。
- ツリーの各ノードのキャッシュフローを複製する限り、（同じツリーを使ってプライシングした場合）負債と複製ポートフォリオの価格は同じになる。

### 複製のエリアとグリッド

資本の算出にポートフォリオの複製を利用する際には、ストレス下の市場価値に関心が向きます。ツリーで表現すると、以下のようになります。



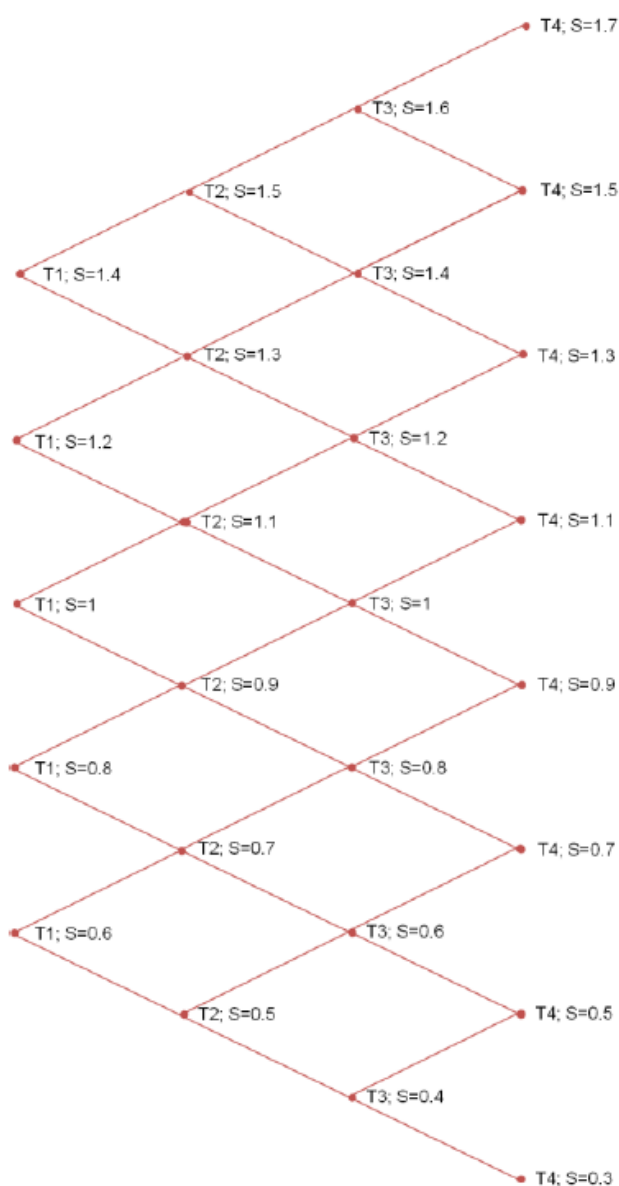
図表 8 : ベースケースおよびストレス下の評価ツリー



ストレス下のツリー（青線）で正確にプライシングするためには、そのキャッシュフローを正確に複製する必要があります。基本ツリー（赤線）からフィッティング状況を補外（Extrapolation）しても、偶然でもない限り正しい値を導くことはできません。

複製ポートフォリオを利用して、潜在的な利益を測定するために正反対のストレスが発生する状況における負債価値を概算することもあるかも知れません。そのためには、大きなグリッド表に亘って複製する必要があります。

図表 9：複製グリッド



これまで、原資産となるリスクが一つしかなく、キャッシュフローがある一時期の世界経済情勢だけに左右される負債プロファイルに関し、良好な複製を作成する方法を検証してきました。

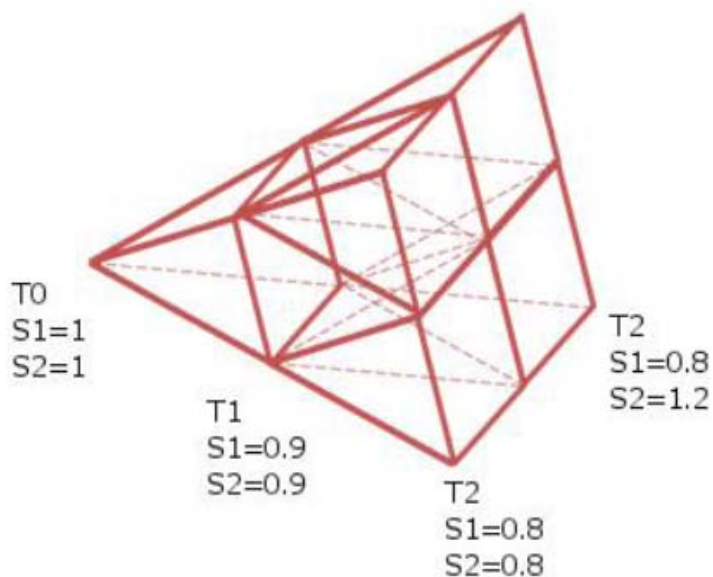
次に、問題をより複雑化させる、現実の負債の2つの重要な特徴について検討する必要があります。その特徴とは、より多くのリスク次元そして経路依存性です。

### 多次元

これまででは、一次元のツリーを使って、リスクが1つに限られた問題を見てきました。し

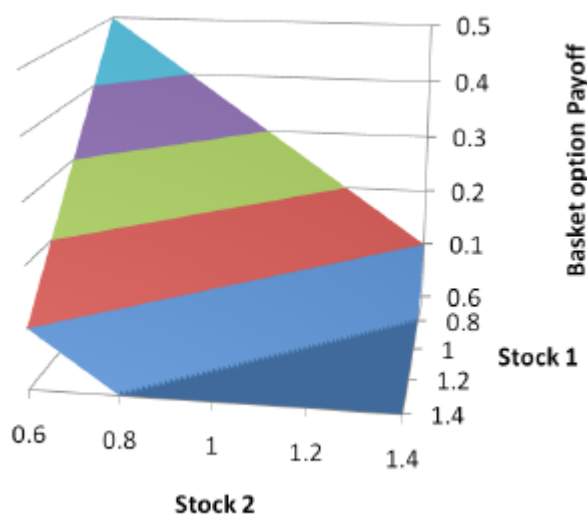
しかし実際には、どの保険ポートフォリオにも多くのリスクソースがあります。以下の図表は2つの原資産株式の変化をツリーで表したものです。

図表 10: 二次元のツリー



二つの原資産に基づいた負債をプライシングまたは複製したい場合に、このようなツリーを利用することができます。

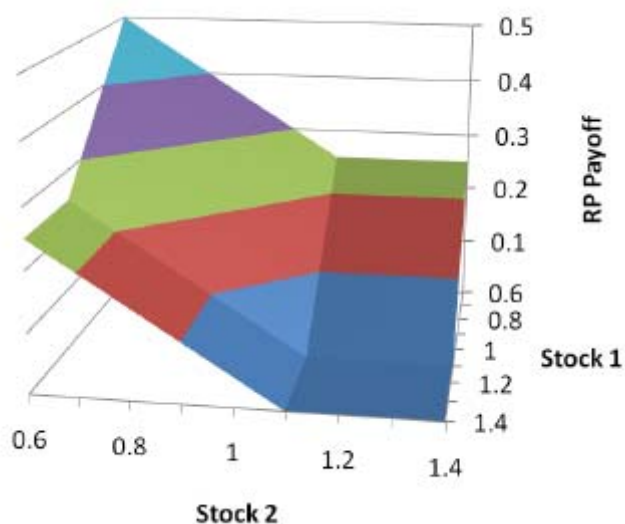
図表 11: バスケット・オプションのペイオフ



単純なプット・オプションの例を、二つの株式の平均価値に基づきペイオフされるバスケ

ット・プット・オプションに応用します。すると、この図表のようなペイオフ・プロファイルが作成されます。

図表 12: バスケット・オプションの複製ポートフォリオ



各原資産株式に対する2つのプット・オプションを組み合わせて複製ポートフォリオを作成すると、ペイオフ・プロファイルは上記とは異なってきます。

ペイオフ・プロファイル上、ある部分（2つの株の価値が1.1を上回るまたは1.1を下回る場合）においては、両者は同じ値を示していますが、その他の部分では両者は非常に異なっています。

複製ポートフォリオの保有ウェイトを変更したり、単一資産オプションあるいは別の資産を増やしてみることもできますが、それでもバスケット・ペイオフを複製することはできないでしょう。

リスク要因間で相互作用がある負債のペイオフの場合、単一のリスク資産のポートフォリオを使用してそれをスタティックに複製することはできません。一般的な2つの資産のペイオフをスタティックに複製するためには、複製ポートフォリオにこれらの資産の両方に依存するデリバティブを含める必要があります。

プットとコールの区分線形関数や、バスケット・オプションの区分平面次元をツールとして利用することで、どんな二次元曲面も複製することができます。

これは非常に単純な概念ですが、以下のような重要な結論を導きます。

- ・ 多くのリスク要因に左右される複雑な負債を、確信を持って統計的に複製したい場合、個々のリスク要因に依存する商品に加え、あらゆる異なるリスク要因の組み合わせに依存する商品を複製に使用する必要がある。また、そうするためには、それぞれの商品に対し多くのストライクプライスを使用する必要がある。
- ・ 単一の資産にだけ依存する複製資産を利用して、複数の資産やリスク要因、そしてそれらの相互作用に依存する負債を複製することはできない。

これは以下の3つの理由から重要な意味を持っています。

1. 複製ポートフォリオに必要な資産の種類が分かる。
2. 価格が市場で容易に観察できる資産のみを使用して、複雑な負債の複製ポートフォリオを正確に作成することは不可能であることが分かる。
3. 多くのリスク要因に依存する単純なデリバティブでさえ、分析的にプライシングすることは困難であり、通常はモンテ・カルロ評価を使用する必要がある。

実務において多くのリスク要因を抱えている場合、複製ポートフォリオにある程度誤差が生じることを許容するか、あるいは原資産の複雑さを増大させる必要があります。

## 経路依存性

もう一つの複製ポートフォリオの課題は、経路依存性に関連したものです。

これまで、ペイオフがある特定の日付のアンダーライニング・リスク要因の値にだけ左右される問題の分析に限定してきました。そして、リスク要因がそこに到達するまでに辿った経路にキャッシュフローが依存し得る事例については検証していません。

時間軸 2 のペイオフが時間軸 1 と 2 の平均株価に基づいた二つの期間のエイジアン・プット・オプションについて検討してみましょう。このデリバティブは、先ほど触れたバスケット・オプションと同じペイオフの形態をとっています。ペイオフ関数を見てみましょう。

$$\text{Asian payoff} = \text{Max}(k - \frac{\text{Stock1@T1} + \text{Stock1@T2}}{2}, 0)$$

Instead of:

$$\text{Basket payoff} = \text{Max}(k - \frac{\text{Stock1} + \text{Stock2}}{2}, 0)$$

株式 1 と株式 2 から時間軸 1 (T1) と時間軸 2 (T2) に変更になっていること以外は、ペイオフのグラフは同じに見えます。フィッティングの問題もまた同様です。時間軸 1 と 2 の株価に相互作用なく依存するヨーロピアン・オプションのポートフォリオを用いて、エイジアン・オプションに適合するペイオフ・プロファイルを作成することはできません。

経路依存性は、ツリー上では追加的なリスク次元のような働きをし、経路依存性を示さない資産を組み合わせた複製ポートフォリオでは、経路依存性のある負債をスタティックに複製することはできないという、先ほどと同じ結果を推察することができます。この問題を解決するためには、(バリア・オプションやエイジアン・オプション等の) 経路依存性オプションのラダーを組み入れたり、あるいは将来におけるダイナミックなリバランスを許容する必要があります。

まとめ

以上の点を、複製の原則としてまとめると以下の通りになります。

- どんな負債キャッシュフローも正確に複製することが可能である。
- フィッティング・ポイントの数を増やすことで、複製の質が向上する。
- 複製ポートフォリオをストレス下の市場価値の複製に利用するためには、フィッティングの範囲を適切に選択する必要がある (例えば、ベースケースの評価ツリーの代わりに可能性のあるポイントをカバーする大きなグリッド表を使用する等)。
- (非常に細かいグリッド上の全てのポイントにより) 負債キャッシュフローを完璧に複製することで、いかなる状況下の負債の値も完璧に複製することが可能である。
- 不完全なキャッシュフローを複製すると、負債と比べ複製ポートフォリオのベースケースの値とストレス下の値が不正確になる。
- 既存または想像上の如何に拘わらず、ほぼどんな種類の金融商品を用いても複製は可能である。
- 適切な金融商品が複製ポートフォリオに使用されている場合にのみ、正確にスタティックな複製をすることが可能である。

- 非直線的ペイオフや複数の資産、経路に依存した金融商品は、相応の特徴を持った負債をスタティックに複製する際に必要となる。これらの特徴全てを組み合わせた負債には、3つの特徴全てを同時に兼ね備えた資産が必要となる。
- 価格が市場で容易に観測できたり、単純な公式でプライシングできるような資産を使用して、複雑な負債を正確に複製することは不可能である。

このような特徴を念頭に置けば、保険実務における複製ポートフォリオの利用を客観的に検討するために必要な基本要素が理解できます。

次回は、保険実務における複製ポートフォリオについてお話したいと思います。

(了)

著作権表示©2011年 Moody's Analytics, Inc. ならびに（あるいは）ムーディーズのライセンサーおよび関連会社（以下総称して「ムーディーズ」という）

本書に記載する情報はすべて、著作権法により保護されており、いかなる人物も、いかなる形式、方法、手段によっても、これらの情報（全部、一部を問わず）を、ムーディーズの事前の書面による同意なく、複写、もしくはその他の方法により再生、複製、送付、譲渡、頒布、配布、転売、またはこれらの目的で使用するために保管することはできません。本書に記載する情報はすべて、ムーディーズが正確かつ信頼しうると考える情報源から入手したものです。しかし、人間および機械による誤り、ならびにその他の要因があり得るため、ムーディーズはこれらの情報をいかなる種類の保証もつけることなく「現状有姿」で提供しており、とりわけ、これらの情報の正確性、速報性、完全性、商品性、および特定の目的への適合性についてはいかなる表示または保証（明示的、黙示的を問わず）も行いません。ムーディーズはいかなる状況においても、またいかなる人物または法人に対しても、以下の (a) (b) について一切責任を負いません。(a) これらの情報の入手、収集、編纂、分析、解釈、伝達、公表、配布に関わる誤り（不注意によるか、その他によるかを問わず）またはその他の状況や偶発事象により（全部、一部を問わず）引き起こされ、発生し、もしくはそれらに関する損失または損害（このような損失や損害がムーディーズ、あるいはその取締役、役職員、従業員あるいは代理人の支配力が及ばない事態に起因するかどうかを問わない）。(b) これらの情報の使用または使用の不可能により発生する、あらゆる種類の直接的、間接的、特別、二次的、要補償、または付随的損害（このような損害には逸失利益を含む。またこのような損害の可能性についてムーディーズが事前に通告を受けたかどうかを問わない）。本書に記載される信用格付け、財務報告分析、予想、およびその他の観測（含まれる場合）は、ムーディーズの意見の表明であり、またそのようにのみ解釈されるべきであり、これを事実の表明、もしくは証券の購入、売却または保有の推奨とみなしてはなりません。ムーディーズは、いかなる形式、または方法によっても、これらの格付けもしくはその他の意見または情報の正確性、速報性、完全性、商品性および特定の目的への適合性について、いかなる保証（明示的、黙示的を問わず）も行っていません。本書に記載する情報の利用者またはその代理人は、投資決定において、それぞれの格付けまたはその他の意見を、一つの要因としてのみ取り扱うべきです。従って、各利用者は購入、保有または売却を検討する各証券、ならびに各証券の発行者、保証人、および信用補完提供者について、自ら研究・評価しなければなりません。